
VITTORIO EM. III




BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XVI
Palchetto
Num.° d' ordine H.9
15.



LEÇONS
DE
STATIQUE.

Ouvrages du même Auteur qui se trouvent chez le même Libraire.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE à l'usage des Élèves de tout âge, comprenant l'Arithmétique des Grecs, seconde édition, 1 vol. in-8., 2 fr. 50 c.
ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, à l'usage des Aspirans à l'École Impériale Polytechnique, première section, troisième édit., 1 vol. in-8., 5 fr.
SECONDE SECTION DE L'ALGÈBRE, seconde édit., considérablement augmentée, 1 vol. in-8., 1814, 6 fr.
ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, avec les deux Trigonométries, suivis d'une introduction à la Géométrie descriptive, et de notions sur la Polygonométrie et le levé des Plans, 1 vol. in-8., avec 12 planches, 5 fr.
LES RÉCIPROQUES DE LA GÉOMÉTRIE, suivies d'un Recueil très-étendu de Théorèmes et de Problèmes, seconde édit., 1 vol. in-8., avec 12 planches, 5 fr.
ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, deuxième édition, considérablement augmentée, avec 14 planches, in-8., 1813, 5 fr. 50 c.
LEÇONS DE STATIQUE, 1 vol. in-8., avec 12 planches, 5 fr.
LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, troisième édit., 1 v. in-8., avec 4 planches, 7 fr.
LEÇONS DE CALCUL INTÉGRAL, troisième édition, 1 vol. in-8., avec 2 planches, 7 fr.
OUVRAGE SUR LE COMPAS DE PROPORTION, suivi d'un Traité de la division des Champs, in-12, 4 fr. 50 c.
RECHERCHES ANALYTIQUES, consignées dans un ouvrage sur la Courbe trisectrice, faisant avec l'ouvrage 1 vol. in-8. conten. 3 pl., 2 f. 50 c.
NOTES sur l'Algèbre de Bezout, faisant avec l'Algèbre un vol. in-8., 5 fr.
NOTES sur le premier volume de l'Algèbre d'Euler; le second volume contient les Notes du Sénateur Lagrange. Prix des deux vol. in-8., 12 fr.

LEÇONS
DE STATIQUE,

A L'USAGE DES ASPIRANS
A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE;

PAR J.-G. GARNIER,

Ancien Professeur à l'École Polytechnique, Docteur ès-Sciences, Instituteur à Paris.





PARIS,
Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Lib. pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.
1811.

AVERTISSEMENT.

Je pense avec plusieurs personnes que la partie élémentaire de la Statique, est du domaine de la Géométrie : c'est d'après cette opinion que j'ai rédigé le présent Traité dont je vais rendre compte.

Quelques auteurs de Statique ont considéré d'abord les forces qui concourent et ensuite les forces parallèles; d'autres ont d'abord établi la théorie des forces parallèles et en ont tiré le parallélogramme des forces; comme les raisons alléguées de part et d'autre m'ont paru également bonnes, j'ai adopté l'un et l'autre plan.

Dans le chapitre premier, j'ai donné d'une manière simple la direction de la résultante de deux forces qui concourent, et ensuite j'en ai assigné la grandeur; j'ai étendu cette proposition à trois forces représentées en grandeurs et

en directions par les trois arêtes d'un parallélipipède rectangle contigues à un même angle trièdre ; enfin j'ai exposé une autre démonstration du parallélogramme, très-longue en apparence, mais qui peut être résumée en peu de mots.

Dans le second chapitre, j'ai donné le théorème des momens de deux et d'un nombre quelconque de forces qui concourent, la composition et les momens de deux forces parallèles : à l'égard des forces qui concourent, j'ai démontré par la Géométrie que la grandeur de la résultante d'un nombre quelconque de forces qui agissent sur un point, estimée suivant un axe quelconque mené par ce point, est égale à la somme des grandeurs des composantes, estimée suivant le même axe, théorème qui sert à établir celui des momens des forces. Ici j'ai dû considérer le système de deux forces égales, contraires et non appliquées au même point, système que M. Poinsot appelle *couple*, et qui forme, dans la Statique, un symbole du genre de ∞, en ce sens qu'il y a alors impossibilité de remplacer l'effet de ces deux forces, par celui d'une force unique, impossibilité qui s'étend à deux forces quelconques non situées

dans un même plan, ainsi que je l'ai démontré plus loin. Dans ce chapitre, la composition des forces parallèles, est fondée sur le parallélogramme.

Dans le chapitre troisième, j'établis la théorie des forces parallèles indépendamment du parallélogramme des forces qui n'en est plus qu'une conséquence.

Dans le quatrième chapitre qui a pour titre: *Composition des Forces en nombre quelconque, situées dans un plan et dans l'espace, et appliquées à des points invariablement liés entre eux*, je me borne à tracer la marche des solutions qui sont le sujet du dernier chapitre de l'ouvrage. Cependant, je donne les formules du centre des forces parallèles, mais en supposant qu'elles agissent toutes dans le même sens, pour en déduire celles du centre de gravité, qui deviennent nécessaires dans le chapitre suivant: je fais connaître le centre des moyennes distances; enfin je démontre, à la manière de M. Poinsot, que deux forces, situées dans deux plans différens, ne sauraient être remplacées par une force unique; mais, dans le septième chapitre, je dégage cette démonstration du point et de l'axe fixe qu'on suppose ici.

Dans le chapitre cinquième où il est question de la recherche des centres de gravité, on remarquera les beaux théorêmes XVII, XVIII, XIX, XX, XXI et XXII, dus à M. Berthot, *ancien Elève de l'École Polytechnique, et maintenant Professeur au Lycée de Dijon*, qui les a consignés dans la Correspondance sur l'*École Polytechnique*.

On pourra se dispenser de lire le chapitre sixième où l'on a considéré les mouvemens des centres de gravité : cependant, on remarquera qu'il n'est pas déplacé ici, parce qu'il se lie naturellement au précédent ; d'ailleurs, tous les théorêmes dont il se compose, sont démontrés par la seule Géométrie.

Dans le chapitre septième, j'ai donné sur l'équilibre des machines plus de détails qu'on n'en trouve dans les Traités modernes, et cependant je ne crois pas avoir trop dit. J'observerai ici, à l'occasion de la vis, qu'on n'a peut-être pas assez motivé la conclusion qu'on déduit de la suite des rapports égaux entre les poids élémentaires retenus en équilibre sur chacun des élémens de la surface du filet de vis, et les forces partielles qui les retiennent en équilibre ; en effet, on compose ces forces par voie

de somme, comme si elles étaient parallèles, sans avoir démontré qu'on peut les ramener à cet état. J'ai rempli cette lacune à l'aide d'un théorême par lequel on prouve que des forces appliquées tangentiellement à une circonférence qui n'a que la faculté de tourner autour de son centre, peuvent être remplacées quant à leur effet, par une force unique égale à leur somme, et agissant tangentiellement en un point quelconque de la même circonférence.

Ainsi que je l'ai annoncé plus haut, j'ai démontré, à la fin de ce chapitre, que deux forces non situées dans un même plan, ne peuvent admettre une résultante unique.

Le chapitre huitième intitulé : *Détermination de l'Equilibre des Machines simples par le principe des Vitesses virtuelles*, est dû tout entier à M. Bossut, *membre de l'Institut national*, qui, par son *Histoire des mathématiques*, s'est fait, comme écrivain, une réputation égale à celle dont il jouit comme géomètre. L'auteur ne donne pas la démonstration du principe qui serait déplacée dans un Traité du genre de celui-ci ; il se borne à en tirer les conditions d'équilibre, en procédant d'une manière uniforme, et en n'employant que le secours de

la Géométrie élémentaire, en sorte qu'il a mis ces recherches à la portée de ceux qui ont vu ce qui précède.

Les chapitres neuvième et dixième où il est question du frottement, de la roideur des cordes, et des conditions de l'équilibre entre des forces appliquées à un point et à un système de points invariablement liés entre eux, quoiqu'étrangers à l'examen, font nécessairement partie d'un Traité de Statique. J'observerai qu'on peut se dispenser d'étudier le premier de ces chapitres, et que dans le cas cependant où on voudrait prendre connaissance des matières qui y sont traitées, on fera bien d'en ajourner la lecture après celle du chapitre dixième dont je vais rendre compte.

Les constructions données dans le chapitre quatrième, n'offrant, pour la vérification de l'équilibre, que des moyens pénibles et d'ailleurs peu exacts, on donne ici, pour arriver au même but, des formules qui n'exigent que les valeurs des composantes d'une force suivant deux ou trois axes rectangulaires. J'ai donc considéré des forces en nombre quelconque,

1°. Situées dans un plan, et qui agissent sur un point libre ;

2°. Situées dans l'espace et qui agissent encore sur un point unique et libre ;

3°. Situées dans un plan et appliquées à des points liés invariablement entre eux dans ce plan ;

4°. Enfin, situées dans l'espace et sollicitant un corps de forme invariable, question qui comprend la précédente.

Dans une note qui termine l'ouvrage, j'ai donné du parallélogramme des forces, la démonstration de M. Poisson, insérée dans le n°. IX de la Correspondance sur l'Ecole Polytechnique.

La Statique peut servir d'introduction à un ouvrage ayant pour titre : *Programme du Cours élémentaire des Machines, par* M. Hachette, suivi *d'un Essai sur la composition des Machines, par* MM. Lanz *et* Bétancourt. Dans l'avertissement, M. Monge s'exprime ainsi : « On entend par élemens des machines, les « moyens par lesquels on change la direction « des mouvemens, ceux par lesquels on peut « faire naître les uns des autres, le mouve- « ment progressif en ligne directe, le mou- « vement de rotation, le mouvement alterna

« de *va* et *vient.* On sent que les machines « les plus compliquées ne sont que les résul- « tats des combinaisons de quelques-uns de « ces moyens individuels dont cet ouvrage « présente l'énumération complette. »

Si ce Traité reçoit un accueil favorable, il reparaîtra avec des améliorations, fruits de l'enseignement et des conseils de MM. les Professeurs, que je recevrai toujours avec reconnaissance.

TABLE

DES MATIÈRES.

Pag.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

Pag.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

LEÇONS
DE
STATIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

L'IDÉE que nous avons des corps est telle que nous ne supposons pas qu'ils aient besoin de mouvement pour exister : ainsi, quoique probablement il n'y ait pas une seule molécule qui soit en repos, nous n'en concevons pas moins clairement qu'un corps peut exister en repos.

La nature n'offre aucun exemple d'un corps qui passe de l'état de repos à celui de mouvement, et réciproquement, sans que ce changement d'état ne soit la suite d'une action exercée sur ce corps par un agent extérieur; et on admet comme fait qu'un corps ne peut, par lui-même, passer du repos au mouvement, ni du mouvement au repos.

Toute cause capable, soit d'imprimer du mouvement à un corps, soit d'anéantir ce mouvement, s'appelle *force* ou *puissance ;* cette force ne produit plus qu'une simple tendance au mouvement, s'il y a un obstacle; et si cette tendance préexistait, elle peut la rendre sans effet. En agissant sur les corps, nous avons le pouvoir de les faire entrer en mouvement ou de les réduire à l'état de repos.

A

La Statique est l'ensemble des méthodes pour résoudre les problêmes relatifs aux actions des forces sur les corps, dans le cas où ces actions se contrebalancent et se détruisent réciproquement, de manière qu'il en résulte *équilibre*, ou immobilité du système.

Si un corps est en repos sur une table ou sur un plan horisontal, et qu'on veuille, en substituant sa main à cette table, ou à ce plan, empêcher le corps de tomber, il faut exercer contre lui un effort pour rendre nul la *tendance* au mouvement, tendance de laquelle résulte une *pression* sur la main. Cette pression, et l'effort qui l'anéantit, offrent déja l'exemple de deux forces qui se détruisent, ou qui se font équilibre.

Si l'on augmente ou qu'on diminue la quantité de matière, c'est-à-dire, la *masse* du corps à soutenir, et qu'on observe les changemens d'effets sur la main qui réagit pour s'opposer à la chûte, on acquiert l'idée du plus ou du moins dans la pression, et conséquemment dans l'effort qu'il faut faire pour la détruire. On observera que la réunion de deux, trois, etc., corps, qui ont des masses égales, donne une pression double, triple, etc., de celle de l'un d'eux, et qu'en général ces corps exercent des pressions proportionnelles à leurs masses, ou aux quantités de matière qu'ils contiennent.

Prenant donc pour terme de comparaison la pression due à un volume donné d'une matière homogène, et considérant qu'on a des moyens simples pour trouver la quantité de cette matière nécessaire pour obtenir une pression égale à celle qu'exerce un corps pesant quelconque, on arrive à la mesure des pressions et des efforts par les poids, en sorte que ces pressions et ces efforts peuvent s'évaluer en nombres.

Mais pour se former une idée nette de la mesure des

forces, il faut d'abord définir avec précision les forces égales, et la force double, triple, etc., d'une autre.

Deux forces sont égales, lorsqu'étant appliquées en sens contraire à un même point, ou aux extrémités d'une droite inflexible, elles se font équilibre.

Si, après avoir reconnu que deux forces sont égales, on les applique dans la même direction à un même point, on aura une force double; si on en réunit trois, on aura une force triple; si on en réunit quatre, on aura une force quadruple, et ainsi de suite.

Ainsi, toutes les fois que nous dirons qu'une force est un certain multiple d'une autre, on entendra que la première est formée par la réunion d'un certain nombre de forces dont chacune est égale à la seconde.

Donc, lorsque dans une question on considérera plusieurs forces qui sont des multiples connus d'une autre force, en prenant celle-ci pour unité, les forces considérées devront être remplacées dans le calcul par des nombres égaux à ces multiples, et dans les constructions géométriques par des lignes proportionnelles à ces mêmes multiples. Nous prendrons la ligne représentative d'une force, sur la direction même de cette force, à partir de son point d'application; c'est ce que nous appellerons souvent la *quantité*, la *grandeur* de la force.

La mesure de ce qu'on peut appeler l'*intensité d'une force*, étant ainsi ramenée à des notions précises, il reste encore à connaître le *point d'application* de cette force, sa *ligne de direction*, et le *sens de son action* suivant cette ligne.

Toute force qui agit sur un corps peut toujours être censée exercer son action sur un point déterminé du corps, dans la direction d'une droite passant par ce point, et suivant un sens déterminé. Il est important d'observer

que les forces ne sont pas toujours immédiatement appliquées aux points matériels sur lesquels elles agissent; il arrive souvent qu'une force met ou tend à mettre un corps en mouvement, soit en le tirant au moyen d'un fil inextensible attaché à ce corps, soit en le poussant par l'intermédiaire d'une droite ou verge inflexible appuyée sur sa surface. Ce fil ou cette droite représente la direction de la force, et l'un ou l'autre de ces intermédiaires ne change en rien l'action de la force qui reste la même que si elle était immédiatement appliquée au point du corps auquel vient aboutir le fil ou la verge qui n'est qu'un simple moyen de transmission de l'action de la force. Il sera donc permis de changer le point d'application d'une force, et de le transporter en un point quelconque de sa direction, pourvu que l'on suppose celui-ci lié au premier par une droite inflexible: ce déplacement du point d'application nous sera très-utile par la suite.

Pour prendre le cas le plus simple, considérons des forces en nombre quelconque, appliquées à un seul point libre placé à la commune intersection de toutes leurs lignes de direction.

D'abord, comme nous l'avons déja dit, deux forces égales appliquées à un point libre, dans deux sens directement opposés, se font équilibre.

En second lieu, lorsque deux forces inégales sont appliquées à un point libre, dans deux sens directement opposés, l'action sur le point, est celle de la plus grande force Q moins celle de la plus petite P: car en prenant de la force Q une portion égale à la force P, l'effet sur le point libre de ces deux forces égales et directement contraires, sera nul, et il ne restera d'action sur le point que celle de la force $Q-P$, dans le sens de la plus grande force Q.

Si plusieurs forces f', f'', f''', etc., appliquées à un point libre, font équilibre à d'autres forces F', F'', F''', etc., appliquées au même point, et que sans toucher aux forces F', F'', F''', etc., on puisse conserver l'équilibre, en substituant à f', f'', f''', etc., une force unique R, R sera ce qu'on appelle la *résultante* des forces..... f', f'', f''', etc., qu'elle remplace quant à l'effet sur le point.

Substituer ainsi une force unique à plusieurs forces, c'est *composer* plusieurs forces en une seule.

Réciproquement, si l'équilibre existait entre une force unique R et plusieurs forces F', F'', F''', etc., et qu'on pût le conserver en substituant à R les forces........ f', f'', f''', etc., toujours appliquées au même point; et sans toucher à F', F'', F''', etc., ces forces...... f', f'', f''', etc., seraient ce qu'on appelle les *composantes* de la force R.

Substituer ainsi plusieurs forces à une force unique, c'est *décomposer* une force en plusieurs autres.

Une résultante fait équilibre à toutes ses composantes, lorsque, sans changer sa ligne de direction, on la fait agir sur le point dans un sens contraire à celui que donne la composition; car le point ainsi sollicité par toutes les composantes, et par cette force égale et directement opposée à leur résultante, se trouve entre l'action de deux forces égales et directement opposées.

Si à un système de forces en équilibre autour d'un point, on ajoute un autre système de forces aussi en équilibre autour du même point, la totalité des forces sera aussi en équilibre.

Lorsque plusieurs forces f', f'', f''', etc., toujours appliquées à un point libre, se font équilibre, l'une quelconque de ces forces, devient la résultante de toutes

les autres, lorsqu'on l'applique en sens contraire de celui dans lequel elle agit : car on peut concevoir le point en équilibre entre l'action de la force f' d'une part, et les actions réunies des forces f'', f''', etc.; il faut donc que la résultante de ces dernières soit égale et directement opposée à f'.

La direction de la résultante de deux forces qui agissent sur un point, est dans le plan des directions des composantes; car si cette ligne pouvait se trouver au-dessus de ce plan, on pourrait toujours assigner, au-dessous du même plan, une ligne d'une position parfaitement symétrique, par rapport à celles des composantes; en sorte que, comme il n'y aurait pas de raison pour que le point tendît à se mouvoir suivant l'une plutôt que suivant l'autre direction symétrique, ou le point n'irait dans aucun sens, ce qui est absurde, puisque les deux composantes ne sont pas égales et directement opposées, ou il suivrait deux directions, et alors il serait en même tems, dans deux lieux de l'espace. La résultante est donc dans le plan des composantes, ce qui est plutôt une vérité de fait que de raisonnement. Il est encore évident que sa direction tombe entre celles des composantes.

Si deux composantes qui n'agissent pas suivant une ligne droite sont égales, égalité qui doit toujours s'entendre des effets de ces forces sur le point sollicité ou soumis à leur action, la direction de leur résultante divise également l'angle entre les directions des composantes; en effet, il n'y a pas de raison pour que cette résultante s'approche plus de l'une que de l'autre des composantes.

La résultante de deux forces quelconques appliquées à un point libre, sous un angle quelconque, doit faire avec la plus grande des deux forces, un angle moindre

que celui qu'elle fait avec la plus petite ; car, en partant de deux forces égales P et Q qui agissent sur un point M, forces dont la résultante divise également l'angle PMQ, si on suppose que la force Q diminue jusqu'à zéro, la résultante ira de sa première position jusqu'à la coïncidence avec P; elle s'éloignera donc de la force qui diminue; ou elle se rapprochera de la force qui augmente, l'autre ne variant pas.

Nous supposerons toujours que la force agisse du point qu'elle sollicite vers la lettre P, ou Q, ou R, etc., qui la désigne : ainsi nous nous abstiendrons généralement de désigner le sens de cette action.

Au lieu des lettres P, Q, R, etc., nous emploierons assez souvent, pour désigner les forces, les lignes prises, à partir de leurs points d'application, sur leurs directions et dans le rapport de ces forces.

Il est peut-être assez inutile d'observer que la nature de la force nous est inconnue, et qu'il nous suffit de connaître ses effets, qu'alors, et au moyen d'un petit nombre de principes fondamentaux, on peut toujours soumettre au calcul les données de la question, et en conclure l'équilibre ou le mouvement.

CHAPITRE PREMIER.

Composition et décomposition des Forces qui concourent.

On a dit (*not. prél.*) que *la résultante de deux forces*
Fig. 1. *égales* MB, MC, *appliquées à un même point* M, *divise également l'angle* BMC : *donc cette résultante est dirigée suivant la diagonale du rhombe* MBDC *construit sur les représentations des composantes.*

Il n'est pas moins évident que si on suppose cette résultante R appliquée au point D lié invariablement au point M, on pourra lui substituer les deux forces CD, BD qui agissent de C vers D et de B vers D, parce que leur effet sera le même sur le point D ou sur le point M, que celui des deux forces MB, MC.

Théorème premier. *Si lorsque deux forces appliquées à un même point* M, *et dont l'une varie d'intensité seulement, sont entre elles comme* m *et* n, *et comme* m *et* p, *leur résultante est toujours dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces, je dis que lorsque ces forces seront entre elles comme* m *et* n + p, *la résultante de celles-ci sera encore dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces.*

Soient le parallélogramme $MBGA$, et CD parallèle à MB, et supposons les trois forces MB, MC, CA dans le rapport des nombres m, n et p : les deux forces MB et MC ont, par hypothèse, une résultante r qui passe par le point D : à celle-ci on peut substituer deux

autres forces BD et CD agissant de B vers D et de C vers D : or la force BD passe par le point G, et si on suppose la force CD appliquée en C, celle-ci et la force CA produisent, par l'hypothèse, une force unique ou résultante qui passe par le point G. La résultante des forces MB, $MC + CA$ ou MB et MA, passe donc au point G, et comme cette résultante passe aussi par M, elle est donc dirigée suivant la diagonale MG.

Faisons maintenant $m = n = p = 1$; et alors les forces MB et MA seront entre elles :: 1 : 2, et leur résultante sera dirigée suivant la diagonale du parallélogramme : la même conclusion aura donc lieu lorsque les forces seront :: 1 : 3, :: 1 : 4.... et enfin :: 1 : g. La proposition étant démontrée, lorsque les forces sont entre elles... :: 1 : g, ou :: g : 1, s'étendra nécessairement aux cas où les forces seront entre elles :: g : 2, :: g : 3.... et enfin :: g : h, ces deux nombres étant commensurables.

THÉORÈME II. *Lors même que les forces sont incommensurables, ou qu'elles ne sont plus dans le rapport de deux nombres entiers, la résultante est encore dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces.*

Car si la résultante des deux forces MB et MA, pouvait être dirigée suivant MO, à gauche de la diagonale MG du parallélogramme BA, en partageant MB en parties égales plus petites que OG, et portant ces parties sur BG, il y aurait un point I de division entre G et O; menant ensuite IK parallèle à MB, la résultante des deux forces commensurables MB et BI, ou MB et MK, sera dirigée suivant MI; mais la résultante de cette résultante et de la force KA que nous supposerons appliquée au point M suivant sa direction, résultante qui sera celle des deux Fig. 3.

forces MB et MA, doit être située dans l'angle IMA; elle ne pourra donc passer par le point O, quelque voisin qu'on le suppose à gauche du point G. Si on prend le point O à droite de G en O'; comme on pourra encore partager MB en un nombre de parties égales, tel qu'en mesurant BO' avec l'une d'elles, il tombe au moins un point de division I' entre G et O', la résultante des forces commensurables MB, MK', sera dirigée suivant MI'; mais si l'on observe qu'en passant des composantes MB, MK' aux composantes MB et MA, la résultante devrait passer de la position MI' à la position MO', et qu'ainsi elle se rapprocherait de la composante qui diminue, on conclura que la résultante ne peut prendre la position MO'. Donc cette résultante doit être encore dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les deux composantes.

THÉORÈME III. *La résultante des deux forces* P *et* Q, *est représentée en grandeur par la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces.*

On se rappellera (*not. prél.*) qu'il y a équilibre entre deux forces P et Q et la force égale et directement opposée à leur résultante R, et que lorsque trois forces
Fig. 4. sont en équilibre, l'une quelconque d'elles, est égale et directement opposée à la résultante des deux autres.

La force R' égale et directement opposée à R résultante des forces MB, MA, fait donc équilibre aux forces P et Q; et conséquemment la force Q' égale et directement opposée à Q, est la résultante des forces P et R'; or, ici la composante P est donnée de grandeur et de direction, l'autre composante R' est donnée de direction seulement, et la résultante Q' est connue de

quantité et de direction. Prenons sur la direction de Q' une longueur $MF = MA$, joignons F et B, puis par F menons FG parallèle à MB : je dis que MG sera la grandeur de la composante R' ; car supposons que la force R' puisse être représentée par $MG_{*} < MG$; si l'on construisait sur MB et MG' un parallélogramme, sa diagonale MF' serait la direction de la résultante des forces P et R' ; mais on sait que cette résultante doit être dirigée suivant MF prolongement de MA : donc $MG' < MG$ ne peut représenter R'. Supposons en second lieu que $MG'' > MG$ puisse représenter R' ; en construisant le parallélogramme BG'', la diagonale MF'' direction de Q', ne serait pas dans le prolongement de MA : donc encore MG'' ne peut pas représenter la grandeur de R' : donc cette force ne peut être représentée que par MG. Or les deux triangles CMA et MFG donnent $MAC = MFG$, $CA = MB = FG$, $MA = MF$; d'où l'on conclut $MG = MC$, ce qui prouve la seconde partie du théorême.

Les théorêmes I, II et III sont le fondement de la Statique, et ils fournissent plusieurs conséquences que nous allons développer.

1°. Quoique l'effet de la résultante sur le point sollicité, soit le même que la somme des effets des composantes, néanmoins sa grandeur est moindre que la somme des grandeurs des composantes, puisqu'on a Fig. 5.

$$MD < MA + AD < MA + MB.$$

2°. Si du point D on mène la perpendiculaire DH sur la direction de la force P, on aura, d'après un théorême de géométrie,

$$\overline{MD}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BD}^2 + 2\,MB \times BH$$
$$= \overline{MB}^2 + \overline{BD}^2 + 2\,MB \times BD \cos a,$$

α étant l'angle entre les composantes. Conséquemment

$$\left.\begin{array}{l} R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,PQ\cos\alpha \\ \text{et} \\ \text{tang}\,RMP = \dfrac{DH}{MH} = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} \end{array}\right\} (1).$$

3°. α, β, γ étant les angles entre P et Q, R et P, Q et R, on a cette suite de rapports,

$$P : Q : R :: \sin\gamma : \sin\beta : \sin\alpha \ldots. \ (2),$$

en sorte que ces six quantités sont liées entre elles par les relations qui existent entre les trois côtés et les trois angles d'un triangle; ainsi trois de ces six quantités étant données, on peut toujours déterminer les trois autres par les méthodes qui s'appliquent aux triangles. Si les trois angles sont donnés, on ne peut assigner que les rapports entre les grandeurs des composantes et de la résultante.

4°. Puisque la direction de la résultante de deux forces P et Q ne dépend que du rapport entre ces forces, lorsque les angles α, β, γ ne varient pas, on doit conclure de la suite de rapports (2), que les composantes P et Q devenant mP, mQ, la résultante R doit devenir mR.

5°. Lorsque l'angle α entre les composantes, restant le même, l'une des composantes augmente, la direction de la résultante se rapproche de celle de cette composante.

6°. Lorsque les directions des composantes sont à angle droit, $\alpha = 100^d$ et $\cos\alpha = 0$: la relation (1) devient donc

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} \ldots. \ (3),$$

d'où l'on conclut qu'une force peut toujours être remplacée, quant à son effet, sur un point matériel par deux autres forces agissant à angle droit sur ce point, pourvu que leurs grandeurs satisfassent à la relation (3)



et réciproquement. Nous emploierons toujours ce dernier mode de décomposition d'une force.

Il sera facile maintenant de résoudre ces questions qui n'exigent que le parallélogramme des forces.

PROBLÈME. *Décomposer une force en deux autres, 1°. données l'une de direction et l'autre de grandeur ; 2°. données en directions seulement; 3°. données en grandeurs seulement; 4°. dont l'une soit donnée en grandeur et en direction. Décomposer une force en trois autres qui agissent, dans un même plan, sur un point, connaissant la direction de l'une et la grandeur de chacune des autres.*

PROBLÈME. *Déterminer, tant en quantité qu'en direction, la résultante de plusieurs forces données en grandeurs et en directions, et appliquées à un point unique.*

Supposons donc un nombre quelconque de forces dans un plan, agissant sur un point libre. Si ces forces ne se font pas équilibre, on trouvera leur résultante en grandeur et en direction, en composant deux de ces forces en une seule, celle-ci avec une troisième force, cette dernière résultante avec une quatrième force, et ainsi de suite. On aura donc réduit toutes les forces du système à une seule qui sera nulle dans le cas d'équilibre : dans le cas contraire, on déterminera l'équilibre dans le système, en appliquant au point M une force égale et directement opposée à la résultante de la totalité des forces ; puisqu'alors ce point sera sollicité par deux forces égales et contraires.

Autrement, soient P, Q, S, T les forces appliquées au point M et représentées par MB, MC, MD, ME : si par l'extrémité B on mène une droite Be égale et Fig. 6.

parallèle à MC, par e une droite ed égale et parallèle à MD, par d une droite dc égale et parallèle à ME, on formera le polygone $MBedc$ dont le côté Mc est en grandeur et en direction la résultante des forces données P, Q, S, T. En effet, la diagonale Me du parallélogramme $MBeC$ est la résultante des forces P et Q, que nous désignerons par R' ; la diagonale Md du second parallélogramme $MedD$, est la résultante R'' de R' et de S : la diagonale Mc du troisième parallélogramme $MdcE$ est la résultante R de R'' et T, et conséquemment celle des quatre forces données.

Si le polygone se fermait de lui-même, ce qui arriverait si l'extrémité du dernier côté tombait en M, il y aurait équilibre dans le systême, puisqu'alors la résultante générale serait nulle.

Les côtés du polygone, proportionnels aux forces et parallèles à leurs directions, peuvent être déterminés dans un ordre quelconque, en ayant toujours égard aux sens d'action des puissances : car il est évident qu'on aurait pu assigner d'abord la résultante des forces P et S, ensuite celle de leur résultante et de la force T; enfin celle de cette dernière résultante et de la force Q. Le dernier côté, ou le côté qui ferme le polygone, est toujours le même en longueur et en position.

THÉORÊME IV. *Trois forces représentées en grandeurs et en directions par les trois arêtes, d'un parallélipipède rectangle, contigues à un même angle trièdre qui est le point sollicité, peuvent être remplacées par une force unique, représentée en grandeur et en direction par la diagonale de ce parallélipipède, qui aboutit à ce point.*

Fig. 7. M étant en même tems le sommet d'un angle solide

trièdre, et le point sur lequel agissent les trois forces P, Q, S, représentées par les arêtes contigues MA, MB, MC, la résultante R' des forces P et Q, sera MD en grandeur et direction : la résultante R de R' et S, c'est-à-dire, celle de P, Q, S, sera en grandeur et en direction, la diagonale ME du parallélogramme $MDEC$, ou du parallélipipède ME.

Si α, β, γ représentent les angles de la résultante R avec MA, MB, MC, on aura ces relations

$$P = R\cos\alpha,\quad Q = R\cos\beta,\quad S = R\cos\gamma;$$

élevant chacune de ces égalités au carré, ajoutant les résultats membre à membre, et tenant compte de cette réduction,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

on aura

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2,\ \text{d'où}\ R = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2},$$

ce qui fait connaître la quantité de la résultante R : on a sa position par les trois angles

$$\cos\alpha = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}},\quad \cos\beta = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + \varphi^2 + S^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{S}{\sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}}.$$

Réciproquement, toute force est décomposable en trois autres capables du même effet sur le point, lesquelles sont complettement représentées par les trois arêtes d'un parallélipipède rectangle, ayant pour diagonale la direction et la grandeur de la force donnée.

THÉORÈME V. *Trois forces dirigées suivant les trois arêtes d'un parallélipipède quelconque, contigues à un même angle solide qui représente le point sollicité, et représentées en grandeurs et directions par ces arêtes, peuvent être remplacées, quant à leur effet sur le point, par une force unique représentée en grandeur et en direction par la diagonale de ce parallélipipède, qui aboutit au point.*

Cette démonstration se fait de la même manière que la précédente. En désignant par a, b, c les angles que ces arêtes ou que la direction des forces P, Q et S font deux à deux, et par R leur résultante qui est en grandeur et en direction la diagonale de ce parallélipipède, on aura

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2 + 2PQ\cos a + 2PS\cos b + 2QS\cos c, \ (*)$$

si l'on note par (P, R), (Q, R), (S, R) les angles de la résultante avec chacune des composantes, on aura aussi

$$R = P\cos(P, R) + Q\cos(Q, R) + S\cos(S, R). \ (*)$$

Nous donnerons du parallélogramme des forces une

(*) J'ai démontré dans le *Recueil de Théorémes et de Problémes*, à la suite des *Réciproques*, 2e. édit., pag. 346 et 347, 1o. que Ss étant la diagonale d'un parallélipipède quelconque, SA', SA'', SA''', trois arêtes contigues à un même angle solide, on avait

$$\overline{Ss}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{SA'}^2 + \overline{SA''}^2 \mp 2SA \cdot SA' \cos ASA' \mp 2SA \cdot SA'' \cos ASA'' \mp 2SA' \cdot SA'' \cos A'SA'',$$

le signe inférieur correspondant aux angles aigus entre les arêtes ;

2o. Que

$$Ss = SA \cos ASs + SA' \cos A'Ss + SA'' \cos A''Ss.$$

seconde démonstration que sa longueur ne permet pas de présenter à un examen ; il sera cependant facile de l'abréger, lorsqu'on en aura bien saisi l'esprit. Nous ne nous occuperons ici que de la recherche de la direction de la résultante.

THÉORÈME VI. *Si deux forces égales* P *agissent sous un angle quelconque sur un point* M *libre, leur résultante* R *est représentée en direction, par la diagonale d'un parallélogramme construit sur les longueurs égales* MA, MB. Fig. 8.

Car la direction de la résultante et celle de la diagonale du parallélogramme construit sur les représentations MA et MB, divisent, en même tems, l'angle AMB en deux parties égales.

Corollaire I[er]. Si chacune des composantes devient mP, la direction de la résultante ne change pas.

Corollaire II. Si l'on suppose la résultante R des forces égales P, décomposée en M suivant les directions MA et MB, chacune de ces composantes sera P. Il en sera de même, si ayant transporté le point d'application de la résultante de M en O, en supposant le point O lié invariablement au point M, on décompose cette résultante en O suivant les droites OE, OD, respectivement parallèles à MA et MB.

THÉORÈME VII. *Si deux forces* Q *égales entre elles, sont appliquées sous des directions parallèles, aux deux extrémités d'une verge inflexible et inextensible, leur effet sur cette verge sera le même que celui d'une force unique* 2 Q *agissant parallèlement à leur commune direction sur le milieu de cette verge.* Fig. 9.

Soient deux points matériels M et B liés par une verge

inflexible et inextensible, et sollicités le premier par deux forces Q et P, le second par deux forces Q et $-P$: les deux forces Q représentées par MA et BC sont égales, parallèles, et elles agissent dans le même sens, c'est-à-dire, de M en A et de B en C : les deux forces P et $-P$ agissent de M vers D et de B vers E, en sorte que leur effet sur la verge est nul, et qu'ainsi l'effet des quatre forces, se réduit à celui de Q et Q, ce qui aura encore lieu en supposant $P=Q$, et alors les représentations MD et BE des forces P et $-P$ seront égales aux droites MA et BC prises dans le rapport des forces Q. La direction de la résultante R' des forces égales Q et P, divise également l'angle DMA des composantes P et Q (*not. préli.*) : la direction de la résultante R'' des forces Q et $-P$, divise aussi en deux parties égales l'angle CBE : ces deux résultantes R' et R'' se rencontrent en O, et en supposant le point de concours O invariablement lié aux points d'application M et B, on pourra considérer la force R' appliquée en O comme la résultante de deux forces P et Q dirigées suivant les droites OD' et OK respectivement parallèles à MD et MA, et la force R'' agissant au même point O, comme la résultante des deux forces $-$ et P et Q dirigées suivant OE' et OK respectivement égales et parallèles à BE et BC. Or l'effet des forces P et $-P$ qui agissent de O vers D' et de O vers E', étant nul, il ne reste d'action sur le point O que celle des forces Q et Q qui agissent dans le même sens et suivant la même droite OK parallèle à la commune direction des forces Q, action qui est représentée par $MA+BC$ (*not. prél.*) et qui est celle de la résultante R des forces Q et Q. D'ailleurs, à cause de l'angle $IOB=OBI$, et de l'angle $MOI=IMO$, les deux triangles BOI, OIM sont isoscèles, et on a $IB=IO=IM$: donc la direction de

la résultante R passe par le milieu I de la droite qui joint les points d'application M et B des composantes ; donc, etc.

Les deux propositions précédentes vont nous servir à assigner la direction de la résultante de deux forces qui agissent sur un point libre, en ne considérant, comme nous l'avons annoncé, que des forces commensurables.

THÉORÈME VIII. *Si deux forces inégales* Q *et* P *agissent sur un point* M *supposé libre, l'une de* M *vers* A, *l'autre de* M *vers* B, *leur effet sur ce point est le même que celui d'une force unique, représentée en direction par la diagonale* ME *d'un parallélogramme construit sur les lignes* MA, MB *prises à partir du point* M *sur les directions et dans le rapport de ces composantes.*

1°. Supposons $Q = 2P$. La résultante R' de la force P, et de l'une des deux forces P dont se compose Q, est dirigée suivant la diagonale MC du parallélogramme construit sur les lignes égales MA' et MB, représentations des forces P. On pourra transporter en C le point d'application de la résultante R', et supposer que l'autre force P, représentée par $A'A = MA'$, agisse en A', les points C et A' étant invariablement liés entre eux et au point M. Si on décompose la force R' appliquée en C et dirigée suivant CC' prolongement de MC, en deux forces dirigées suivant les droites CD, CE respectivement parallèles à MB et MA, chacune de ces composantes, sera P, puisque, réciproquement, ces composantes donneraient pour résultante R'. On aura donc deux forces P égales et parallèles aux extrémités A' et C de la droite $A'C$, lesquelles se composent en une résultante R'' égale à leur commune direction, et passant par le milieu O de la Fig. 10.

droite $A'C$ (*Théor.* VII). Que l'on transporte en O les points d'application de R'' et de la force P dirigée suivant CD; leur résultante R qui sera celle des forces Q et P passera aussi par O, mais elle doit aussi passer par M, et conséquemment elle agira suivant la direction de la diagonale ME du parallélogramme AB dont les côtés MA et MB sont précisément dans le rapport des forces Q et P.

Fig. 11. 2°. Soit $Q = 3P$. Nous décomposerons Q en $2P + P$, la force P étant représentée par MB, la force Q le sera par $MA = 3MB$ et la force $2P$ par $MA' = 2MB$. La résultante R' des deux forces $2P$ et P, sera dirigée suivant la diagonale MC du parallélogramme construit sur MA' et MB : si l'on transporte son point d'application de M en C, le point C étant invariablement lié au point M, et qu'en C on la décompose en deux forces dirigées suivant CE et CD respectivement parallèles à MA' et MB, la composante suivant CD prolongement de $A'C$, sera P, et la composante suivant CE prolongement de BC, sera $2P$. Si l'on compose la force P suivant CD avec une des forces P suivant CE, leur résultante R'' divisera également l'angle ECD ; elle sera donc dirigée suivant CK prolongement de $A''C$ diagonale du parallélogramme intermédiaire $A''C$, construit sur les forces P et P. Si maintenant on compose l'autre force P agissant au point C suivant CE avec la force P excès de Q sur $2P$ et que nous supposerons appliquée au point A'' invariablement lié au point M, la résultante R''' sera d'une direction parallèle à la direction commune des composantes, et elle ira passer par O, milieu de $A''C$, et conséquemment par I, milieu de CA'. Cette résultante R''' qui équivaut à $2P$ et la résultante R'' qui remplace, quant à l'effet, les deux forces P et P, appliquées l'une et l'autre à leur point de concours O lié au point M, donneront

lieu à une résultante R qui sera celle des forces $3P$ et P et qui passera par O ; or cette résultante passe aussi par M ; elle est donc dirigée suivant la diagonale ME du parallélogramme construit sur les longueurs MA et MB prises dans le rapport des forces $3P$ et P.

3°. Soit $Q = 4P = 2P + 2P$. La résultante des forces $2P$ et P est dirigée suivant MC diagonale du parallélogramme construit sur les longueurs MA'' et MB prises sur les directions et dans le rapport de ces forces. La résultante R' appliquée en C et décomposée en ce point suivant les lignes CD et CE respectivement parallèles et égales à MB et MA'', donne les composantes P et $2P$. Les deux forces dont chacune vaut $2P$, dirigées suivant $A''A$ et CE, et appliquées aux points A'' et C liés invariablement au point M, donnent la résultante R'' dirigée parallèlement à MA et passant par I, milieu de $A''C$. La force P dirigée suivant CD étant appliquée à ce point I, et composée avec R'', donnera la résultante R des forces $4P$ et P qui passera par I : mais elle doit aussi passer par M. Donc cette résultante sera dirigée suivant MI, et conséquemment suivant la diagonale ME du parallélogramme construit sur les longueurs MB et MA prises dans le rapport des forces P et $4P$. Fig. 12.

Nous allons étendre ce raisonnement à deux forces, dont l'une soit P, et l'autre $Q = mP$, m étant un nombre entier; mais il conviendra de distinguer entre le cas de m nombre impair, et celui de m nombre pair.

1°. Soit m un nombre impair : on imaginera un parallélogramme construit sur des longueurs prises à partir du point M d'application des forces, sur les directions et dans le rapport de ces forces, puis ce parallélogramme

divisé en m parallélogrammes partiels égaux, numérotés 1, 2, 3, etc., à partir de celui dont un des angles est le point matériel M. Cela posé, on prendra la plus grande moitié de $\frac{m+1}{2}$, et en supposant ce nombre impair, on composera les forces $\left(\frac{m+1}{2}\right)P$ et P en une résultante R' dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les représentations des composantes $\left(\frac{m+1}{2}\right)P$ et P, prises à partir du point M sur les longueurs qui représentent les forces Q ou mP et P. Si à l'extrémité C de cette diagonale, opposée au point M, on décompose la résultante R' suivant deux directions parallèles aux directions primitives des forces Q et P, ainsi qu'on l'a fait précédemment dans des cas particuliers, et pour m nombre impair, on retrouvera les deux composantes $\left(\frac{m+1}{2}\right)P$ et P. Qu'en ce point C, l'on compose l'une des $\left(\frac{m+1}{2}\right)$ forces P avec P, la résultante R'' prolongée, sera dirigée suivant le prolongement de la diagonale du parallélogramme partiel dont le numéro est $\frac{m+1}{2}$, et il restera à composer deux forces parallèles et égales, qui sont

$$\left(\frac{m+1}{2}-1\right)P=\left(\frac{m-1}{2}\right)P,$$

et

$$\left(m-\frac{m+1}{2}\right)P=\left(\frac{m-1}{2}\right)P,$$

appliquées aux deux extrémités de la diagonale du parallélogramme partiel numéroté $\frac{m+1}{2}$: leur résultante R''' ira passer par le milieu O de cette diagonale : donc la résultante R des résultantes R''' et R'' appliquées en O, laquelle sera celle des forces mP et P, c'est-à-dire, Q et P, ira passer par le centre du parallélogramme partiel qui tient le milieu dans le parallélogramme total; mais cette résultante doit aussi passer par M: donc elle sera dirigée suivant la diagonale du parallélogramme total. Le raisonnement et la conclusion resteraient absolument les mêmes pour $\frac{m+1}{2}$ nombre pair, c'est-à-dire, pour $m=3, =7, =11$, etc.

2°. Soit m nombre pair : on composera $\frac{m}{2}P$ avec P, et la résultante R' sera la diagonale du parallélogramme construit sur les représentations de ces forces. Si $\frac{m}{2}$ est impair, la résultante R' étant décomposée au point C diagonalement opposé à M, en deux forces $\frac{m}{2}P$ et P suivant des directions parallèles à celles de Q et P, la composante P se trouvera dirigée suivant le prolongement vers C de la base du parallélogramme composé de $\frac{m}{2}$ parallélogrammes partiels, et il restera aux deux extrémités de cette base deux forces parallèles et égales chacune à $\frac{m}{2}P$, qui donneront pour résultante R'' : la direction de cette résultante rencontrera celle de P dirigée suivant la base du parallélogramme moitié du parallélogramme total, dans le milieu I de cette base; or la résultante R de R'' et de P, c'est-à-dire, de mP et P

passant par I et par le point M d'application des forces, sera encore dirigée suivant la diagonale du parallélogramme total construit sur des longueurs prises à partir de M, sur les directions et dans le rapport des composantes. Dans le cas de $\frac{m}{2}$ nombre pair, il n'y aura rien à changer au raisonnement et conséquemment à la conclusion.

Nous observerons que, dans ce second cas, après avoir décomposé au point C diagonalement opposé à M, la résultante R' des forces $\frac{m}{2}P$ et P en ces deux forces, on n'a plus à composer que les deux forces parallèles $\frac{m}{2}P$ dont la résultante mP rencontre la direction de la force P qui reste à considérer, au milieu de la base du parallélogramme moitié du parallélogramme total, tandis que, dans le premier cas, la décomposition de R' au point analogue, donne deux composantes dont l'une $\left(\frac{m+1}{2}\right)P$ excède sa parallèle $\left(\frac{m-1}{2}\right)P$ d'une force P; en sorte que pour ramener les deux forces parallèles à être égales, puisqu'on ne sait les composer que dans ce cas, il faut distraire de $\left(\frac{m+1}{2}\right)P$ une force P pour la composer avec P, et alors il reste les deux forces parallèles et égales chacune à $\left(\frac{m-1}{2}\right)P$.

Passons à la relation plus générale $Q=\frac{m}{n}P$: dans ce cas, la force p étant commune mesure de Q et P, on a $\frac{Q}{P}=\frac{mp}{np}=\frac{m}{n}$.

1°. Supposons $n = 2$, et prenons les longueurs MA Fig. 13.
et MB pour représenter les forces $Q = mp$ et $P = 2p$. On pourra (*Théor.* VII), regarder la force $2p$ comme la résultante de deux forces p qui agiraient sous des directions parallèles à MB et qui seraient appliquées aux points A et A' équi-distans de M. Si on transporte de M en A le point d'application de la force $Q = mp$, on aura en ce point deux forces mp et p qui donneront la résultante R' dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les longueurs $AA'' = MA$ et $Aa = \frac{1}{2} MB$. Or les directions de la résultante R' et de l'autre force p appliquée en A', prolongées, se rencontreront en A''' qu'on peut prendre pour le point d'application de chacune de ces forces : donc la résultante R des forces R' et p qui sera celle des forces mp, p et p, et conséquemment des forces Q et P, passera par A''' ; mais elle doit passer par M ; donc elle sera dirigée suivant $A'''M$. Or, dans les deux triangles semblables AKA'', $AA'A'''$, on a $AA' = 2AA''$, et conséquemment..... $A'A''' = 2A''K = MB$; d'ailleurs $MA' = MA$; donc les deux triangles $MA'''A'$ et MAC sont égaux, et le prolongement MC de $A'''M$, est la diagonale du parallélogramme MC construit sur les longueurs MA et MB prises dans le rapport des forces Q et P.

2°. Soit $n = 3$: les droites MA et MB représentant Fig. 14.
toujours les quantités et les directions des forces $Q = pm$ et $P = 3p$; je compose Q avec $2p$; la résultante R' est dirigée, comme on vient de le voir, suivant la diagonale du parallélogramme AA' dont le côté MA' représente $2p$; je décompose R' en C suivant CC' et CA'' respectivement parallèles à MA et MB ; en sorte qu'on a, suivant CA'', une force $2p$, et il reste, suivant MB, une force p. Les forces parallèles p qui agissent aux points

M et C donnent une résultante $R'' = 2p$ dont le point d'application est en I milieu de MC, et il reste en C les deux forces Q et p dirigées suivant CC' et CA'', forces qui donnent la résultante R''' dirigée suivant la diagonale du parallélogramme $C'A'''$ dans lequel CA''' représente p; de sorte que si l'on prolonge la direction de $R'''C$ jusqu'à celle de R'' en K, la résultante R de R''' et R'' sera celle de Q, p, et $2p$ ou Q et $3p$: on a donc deux points M et K de sa direction. Or, le côté MB étant divisé en trois parties dont chacune représente une force p, et le parallélogramme MA''' étant divisé en trois parallélogrammes égaux, il est évident que K est le milieu de la diagonale du parallélogramme moyen $A'a$, et qu'ainsi la résultante R de P et Q, est encore dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les représentations des forces Q et P.

On remarquera sans peine qu'on passe de la résultante des forces mp et $3p$ à celle des forces mp et $4p$ et plus généralement de celle des forces mp et np à celle des forces mp et $(n+1)p$, n étant un nombre impair, de la même manière qu'on vient de passer de la résultante des forces mp et p à celle des forces mp et $2p$, et que le passage de la résultante des forces mp et np à celle de mp et $(n+1)p$, n désignant un nombre pair, se fait de la même manière que celui de la résultante de mp et $2p$ à celle de mp et $3p$. Le théorème est donc ainsi étendu au cas des deux forces Q et P commensurables.

Nous renverrons pour la direction de la résultante, dans le cas de l'incommensurabilité, et pour sa grandeur à ce qui a été démontré (*Théor.* II et III).

CHAPITRE II.

Des momens des Forces qui concourent ; de la composition et des momens des Forces parallèles.

Tout produit d'une force par une perpendiculaire sur sa direction, se nomme *moment de la force :* on n'attachera à cette dénomination d'autre idée que celle d'un simple produit de deux nombres dont l'un exprime la force, et l'autre sa distance à un point.

Si plusieurs forces concourent en un point, et que d'un point quelconque, pris dans leur plan, on mène des perpendiculaires sur les directions des forces, ce point de départ des perpendiculaires, se nommé *centre des momens.*

Avant d'en venir au théorême des momens, nous démontrerons une propriété qui trouvera son emploi dans ce chapitre, et dont nous tirerons par la suite d'autres conséquences.

Théorême IX. *La grandeur de la résultante d'un nombre quelconque de forces qui agissent sur un point libre, estimée suivant un axe quelconque mené par ce point, est égale à la somme des grandeurs des composantes, estimées suivant le même axe.*

Soient P, Q, S, T les composantes représentées par MB, MC, MD, ME et R la résultante : on a vu (*pag.* 13, *Probl.*) que cette résultante était représentée par Fig. 6.

Mc dernier côté du polygone $MBedc$ dont les côtés MB, Be, ed, dc sont proportionnels aux forces P, Q, S, T. Or, MN étant un axe pris à volonté, si des points B, e, d, c on abaisse sur cet axe les perpendiculaires Bb', ee', dd', cc', on aura

$$Mc' = Mb' + b'e' + e'd' + d'c';$$

Mais Mc', Mb', $b'e'$, $e'd'$, $d'c'$ sont les projections de la résultante et des composantes sur l'axe; donc, etc.

THÉORÈME X. *Si plusieurs forces agissent sur un point libre, le moment de la résultante est égal à la somme des momens des composantes.*

Fig. 15. Pour commencer par le cas le plus simple, considérons deux forces P', P'' et leur résultante R, et parce que le point F de départ des perpendiculaires, peut avoir trois positions, prenons-le d'abord hors de l'angle des composantes; soient MB, MC, MD les représentations des forces P', P'' et de leur résultante R, ... Fp', Fp'', Fr les perpendiculaires abaissées du point F sur les directions de P', P'' et R: si l'on joint les points F et M, F et D, F et B, on aura un triangle MFD, composé de trois triangles MFB, BFD, MBD, et conséquemment l'égalité

$$MFD = MFB + BFD + MBD.$$

Remplaçant ces surfaces par leurs valeurs, et observant que Fp'' perpendiculaire à MC, l'est à sa parallèle DB prolongée jusqu'en L, on aura celle-ci :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\, MD \times Fr &= \tfrac{1}{2}\, MB \times Fp' + \tfrac{1}{2}\, DB \times FL + \tfrac{1}{2}\, DB \times Lp'' \\ &= \tfrac{1}{2}\, MB \times Fp' + \tfrac{1}{2}\, DB \times Fp'',\end{aligned}$$

qui devient

$$R \times r = P' \times p' + P'' \times p'' \dots (1)$$

en désignant par r, p', p'' les perpendiculaires Fr, Fp', Fp''.

Si le point F est situé dans l'angle des composantes, par exemple, entre P' et R, on aura, en conservant la construction précédente, Fig. 16.

$$MBD = MFD + BFD + BFM,$$

d'où

$$MFD = MBD - BFD - BFM,$$

et

$$\tfrac{1}{2}\, MD \times Fr = \tfrac{1}{2}\, DB \times Lp'' - \tfrac{1}{2}\, BD \times FL - \tfrac{1}{2}\, BM \times Fp'$$
$$= \tfrac{1}{2}\, DB \times Fp'' - \tfrac{1}{2}\, BM \times Fp',$$

donc

$$R \times r = P'' \times p'' - P' \times p' \dots (2).$$

Le point F étant supposé entre la résultante et la force P'', on trouvera cette relation,

$$R \times r = P' \times p' - P'' \times p'' \dots (3).$$

Si le point F de départ des perpendiculaires est pris sur la résultante, la perpendiculaire r devient nulle, et conséquemment le produit $Rr = 0$, et alors les formules (2) et (3), qui conviennent à cette hypothèse, s'accordent à donner

$$P' \times p' = P'' \times p'', \quad \text{d'où} \quad P' : P'' :: p'' : p'.$$

Donc, si d'un point quelconque de la résultante de deux forces qui agissent sur un point libre, on abaisse des perpendiculaires sur leurs directions, les grandeurs des composantes, seront réciproquement proportionnelles à ces perpendiculaires.

Si le centre des momens est pris sur une composante,

la résultante et l'autre composante sont en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions.

Fig. 17. *Rem.* Les équations (1), (2), (3) montrent que le moment de la résultante, étant seul dans un membre, celui de la force qui est situé du même côté que cette résultante par rapport à la ligne MF, est de même signe, et que le moment de l'autre force, est de signe contraire.

Venons maintenant à la démonstration du théorême énoncé. Soient P', P'', P''', P^{iv}, etc., des forces qui concourent en M et R leur résultante : soient MA, MB, MC, MD, ME des longueurs prises dans les rapports des composantes et de la résultante. Si des points A, B, C, D, E, on abaisse des perpendiculaires Aa, Bb, Cc, Dd, Ee sur l'axe MX qui joint le point de concours M au point F de départ des perpendiculaires Fa', Fb', Fc', etc., sur les directions des forces, on aura d'abord, à cause des triangles rectangles semblables MAa, FMa'

$$MA : Aa :: MF : Fa',$$

d'où

$$MA \times Fa' = MF \times Aa;$$

par la même raison,

$$MB \times Fb' = MF \times Bb$$
$$MC \times Fc' = MF \times Cc$$
$$MD \times Fd' = MF \times Dd.$$

Ajoutant toutes ces égalités, il vient

$$MA \,.\, Fa' + MB \,.\, Fb' + MC \,.\, Fc' + MD \times Fd'$$
$$= MF\,(Aa + Bb + Cc + Dd) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Or, si par M on mène une perpendiculaire MY à MF, le facteur de MF sera la somme des forces estimées suivant MY, et il a été démontré (*Théor.* IX), que

cette somme est égale à la résultante R estimée de la même manière, en sorte qu'on pourra remplacer..... $Aa + Bb + Cc + Dd$ par Ee. Mais on a aussi

$$ME \times Fe' = MF \times Ee.$$

Donc, si l'on désigne par p', p''..... r les perpendiculaires menées du point F sur les directions des forces et de leur résultante, la propriété (4) deviendra

$$P'.p' + P''.p'' + P'''.p''' + P^{\text{iv}}.p^{\text{iv}} = R.r....(5)$$

Si la force P^{iv}, par exemple, tombait au-dessous de MF, la perpendiculaire Dd serait négative, et il en serait de même du produit $MF.Dd$ ou de $MD.Fd'$ qui est $P^{\text{iv}}p^{\text{iv}}$, en sorte que la propriété (5) deviendrait

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' - P^{\text{iv}}p^{\text{iv}} = Rr.$$

Généralement donc, on prendra positivement les momens des forces situées au-dessus de MF, et négativement ceux des forces situées au-dessous de cet axe, en supposant, bien entendu, que chacune des forces agisse de M vers la lettre qui la désigne.

On observera que, dans le cas de l'équilibre, la résultante $R = 0$, et qu'ainsi le produit $Rr = 0$, ce qui arrive encore lorsque le point de départ des perpendiculaires est pris sur la résultante elle-même.

On tire encore de la comparaison des triangles semblables employés précédemment, ces égalités

$$MA \,.\, Ma' = MF \,.\, Ma$$
$$MB \,.\, Mb' = MF \,.\, Mb$$
$$MC \,.\, Mc' = MF \,.\, Mc$$
$$MD \,.\, Md' = MF \,.\, Md$$

et par l'addition

$$MA.Ma'+MB.Mb'+MC.Mc'+MD.Md'$$
$$=MF(Ma+Mb+Mc+Md)=MF.Me=ME.Me'\ldots (6).$$

Corollaire Ier. Puisque la somme $Ma+Mb+Mc+Md$ des projections des composantes sur l'axe x, est égale à la projection Me de la résultante sur le même axe, et qu'aussi sur l'axe des y, la somme $ma''+Mb''+Mc''+Md''=Me''$; on déterminera la résultante en grandeur et en position, en portant ces deux sommes de projections mises bout à bout, sur chacun des deux axes, élevant par chaque extrémité une perpendiculaire sur chaque axe, et joignant le point M et la rencontre de ces deux perpendiculaires. Cette construction est préférable à celle que nous avons donnée (*pag.* 13, *Probl.*)

Fig. 18. *Coroll. II.* Si les forces P', P'', P''', P^{v} sont telles en grandeurs et en directions que la somme des projections $Ma+Ma$, soit linéairement égale à la somme des projections $Md+Md$, et qu'on ait aussi la somme $Ma''+Md''$ linéairement égale à $Mb''+Mc''$, la résultante des quatre forces sera nulle, c'est-à-dire, que ces forces se feront équilibre autour du point M. Car, alors l'effet des forces données sur le point M, pourra être remplacé suivant l'axe XX' par celui des deux forces $2Ma$ et $2Md$ et suivant l'axe YY' par $Ma''+Md''\ldots$ et $Mb''+Mc''$, en faisant la somme des forces qui agissent dans le même sens; mais comme, par hypothèse, les deux forces $2Ma$, $2Md$ sont égales, et de plus directement opposées, l'effet des composantes suivant l'axe des x est nul, et il en est de même, et par la même raison, de celui des deux composantes suivant l'axe des y. Donc, le point M reste en équilibre entre

l'action des huit forces par lesquelles on a pu remplacer les forces données.

Coroll. III. On déterminera d'une manière analogue la direction et la grandeur de la résultante d'un nombre quelconque de forces situées dans l'espace et appliquées à un point unique et libre, et on sera assuré qu'il y a équilibre autour de ce point, lorsque les projections de chacune des composantes, suivant les trois axes rectangulaires menés par le point, seront séparément nulles, en ayant égard aux sens de leurs actions, toujours déterminés par ceux des actions des forces données.

Coroll. IV. Si la seule somme de projections suivant l'axe des x est nulle, alors la résultante agira suivant l'axe des y et dans le sens de la plus grande somme de projections suivant cet axe, en supposant toutes les forces dans un plan : si les forces sont dans des plans différens, et décomposées suivant trois axes rectangulaires menés par leur point de concours, et que la somme des projections suivant l'axe des x soit nulle, la résultante agira dans le plan des yz, et sa grandeur ainsi que sa position dans ce plan, résulteront des grandeurs et des sens d'actions des projections suivant les axes des y et des z. Si les sommes de projections sont nulles suivant l'axe des x et suivant l'axe des y, il n'y aura d'action sur le point que suivant l'axe des z.

THÉORÈME XI. *Si deux forces parallèles agissent sur deux points d'une ligne droite inflexible et inextensible, 1°. la grandeur de la résultante est égale à la somme des grandeurs des composantes; 2°. la direction de la résultante est parallèle à la direction commune des composantes; 3°. la direction de la résultante coupe la portion*

de la droite comprise entre les points d'application des composantes, en deux parties réciproquement proportionnelles à ces composantes.

Fig. 19. Soient P', P'' deux forces qui concourent, α l'angle entre ces forces, et R la résultante ; on a trouvé (pag. 12) cette relation

$$R^2 = P'^2 + P''^2 + 2P'P'' \cos \alpha,$$

qui a lieu quelque petit que soit l'angle α, et qui subsiste encore à la limite où cet angle devient nul et où conséquemment les forces deviennent parallèles. Dans cette hypothèse, la relation précédente devient

$$R^2 = P'^2 + 2P''P' + P''^2,$$

de laquelle on déduit

$$R = P' + P'' \ldots . (1).$$

Quant à la direction de la résultante, on observera que si de l'extrémité D de la représentation de la résultante, on mène des perpendiculaires $DK = p'$, $DH = p''$ sur les directions des forces P', P'', et qu'on désigne par θ et ε les angles entre P' et R, P'' et R, on aura

$$\left.\begin{array}{l} p' = R \sin \theta = P'' \sin \alpha \\ p'' = R \sin \varepsilon = P' \sin \alpha \end{array}\right| \text{ donc } \left|\begin{array}{l} \sin \theta = \dfrac{P'' \sin \alpha}{R} \\ \sin \varepsilon = \dfrac{P' \sin \alpha}{R} \end{array}\right\} (2)$$

or pour l'angle α nul, $\sin \theta$ et $\sin \varepsilon$ sont aussi nuls.

D'ailleurs, le point de départ des perpendiculaires étant pris sur la résultante, on a cette équation des momens (pag. 29.)

$$P'p' = P''p'', \quad \text{d'où} \quad P' : P'' :: p'' : p' \ldots . (3).$$

Alors la fig. 19 se transforme dans la figure 20 ; c'est-à-dire, que les deux forces parallèles P' et P'' agissent sur deux points matériels B et C liés l'un à l'autre par une verge rigide BC, et les perpendiculaires $DK = p'$, $DH = p''$ menées du point D où la résultante R rencontre la droite BC, sur les directions de P' et P'', étant dans le rapport de DB à DC, la proportion (3) devient

$$P' : P'' :: DC : DB \ldots (4).$$

Les résultats (1), (2) et (4) rendent l'énoncé du théorême que nous allons démontrer directement.

Soient P', P'' deux forces parallèles appliquées dans le même sens à deux points B et C d'une verge inflexible et inextensible : supposons aux mêmes points deux forces Q' et Q'' égales et appliquées dans des sens opposés, l'une suivant BQ' et l'autre suivant CQ'' : l'effet de ces deux forces sur la verge sera nul, et conséquemment la résultante des quatre forces P', P'', Q', Q'' sera la même que celle des deux forces primitives P' et P''. Or, les directions de la résultante R' des forces P' et Q' et de la résultante R'' des forces P'' et Q'', iront concourir en un point M qu'on supposera invariablement lié aux points B et C. Si par M, on mène une parallèle FH à CB, et une parallèle MR à la direction commune des composantes, et qu'en M, où on supposera transportés les points d'application de R' et R'', on décompose chacune de ces forces suivant FH et MR, ces composantes seront en quantités et en directions les mêmes qu'en B et C : on aura donc suivant FH deux forces Q' et Q'' égales et contraires qui s'entredétruiront, et suivant MR les deux composantes P' et P'' dans le même Fig. 21.

sens et qui, conséquemment, se composeront par voie de somme.

Donc, 1°. *la grandeur de la résultante* R *de deux forces parallèles, est égale à la somme des grandeurs de ces forces*; et 2°. *sa direction est parallèle à la commune direction des composantes.*

Il reste à trouver le point d'intersection D, c'est-à-dire, celui d'application de la résultante.

Soient MP', MQ', des lignes proportionnelles aux forces P' et Q'; MP'', MQ'' des lignes proportionnelles aux forces P'' et Q'' : on aura ces proportions

$$P' : Q' :: MD : DB ; Q'' : P'' :: DC : MD.$$

Si on les multiplie par ordre, et qu'on tienne compte de $Q' = Q'$, on aura celle-ci

$$P' : P'' :: DC : DB \ldots . (4)$$

Donc, 3°. *le point d'application de la résultante, divise la droite qui joint ceux des composantes, en deux parties réciproquement proportionnelles à ces composantes.*

Le théorême des *momens* s'étend aux forces parallèles, mais il n'est pas restreint au seul cas des perpendiculaires menées d'un point sur les directions des forces.

Fig. 22. Les forces P', P'' toujours parallèles, étant de plus perpendiculaires à la verge BC, si l'on suppose que le centre des momens, soit pris en F sur le prolongement de CB, et si l'on multiplie par FD les deux membres de l'égalité

$$R = P' + P'',$$

on aura

$$R \times FD = P' (FB + BD) + P'' (FC - DC);$$

or, d'après la proportion (4),

$$P' \times BD = P'' \times DC,$$

la formule précédente se réduit à

$$R \times FD = P' \times FB + P'' \times FC \ldots. (5).$$

Le point F étant entre B et D, on a

$$R \times FD = P'(BD - BF) + P''(FC - DC),$$

et d'après la relation $P' \times BD = P'' \times DC$, il reste

$$R \times FD = P'' \times FC - P' \times BF \ldots. (6).$$

Enfin, le point F tombant entre D et C, on a

$$R \times FD = P'(FB - BD) + P''(DC - CF),$$

c'est-à-dire,

$$R \times FD = P' \times FB - P'' \times FC \ldots. (7),$$

en observant que ces produits $- P' \times BD$ et $P'' \times CD$ se détruisent.

Si par F, pris sur le prolongement de CB, on mène Fig. 22. une transversale quelconque $FB'C'$, on aura cette suite de rapports égaux,

$$FD : FB : FC :: FD' : FB' : FC',$$

d'après laquelle la propriété (5) se change dans celle-ci,

$$R \times FD' = P' \times FB' + P'' \times FC' \ldots. (8).$$

Si par F, pris entre B et D, on mène la transversale $B''D'C''$, la propriété (6) devient

$$R \times FD' = P'' \times FC'' - P' \times FB'' \ldots. (9).$$

Enfin, si par F, pris entre D et C, on mène la trans-

versale $B'''D'C'''$, la propriété (7) se transforme dans la suivante,

$$R \times FD' = P' \times FB''' - P'' \times FC''' \ldots (10).$$

Rem. Nous indiquerons un moyen mécanique de reconnaître les signes des momens et des forces qui concourent, et des forces parallèles. 1°. Si l'on imagine que les forces P', P'', etc. qui concourent au point M, agissent sur ce point
Fig. 17. au moyen de verges rigides liées invariablement aux perpendiculaires, que nous regarderons comme des leviers ayant la faculté de tourner autour de leur point de départ F, et que l'on observe que le moment de la résultante doit toujours être seul et positif dans un membre, on donnera le signe + aux momens des forces qui tendent à faire tourner leurs bras de levier autour de F, dans le sens suivant lequel la résultante tend à faire tourner le sien, et le signe — aux momens des forces qui tendent à faire tourner leurs bras de leviers dans un sens contraire à celui-là. L'application de cette règle fait trouver les signes des formules (1), (2), (3), (pag. 29) et ceux de la
Fig. 22. formule (5), (pag 31). On supposera que les verges FBC, $FB'C'$, $B''FC''$, $B'''FC'''$ aient la faculté de tourner autour du point F, en vertu des forces P', P'', R qui agissent sur elles dans le même sens, et en observant que le moment de la résultante doit toujours être seul et positif dans un membre, on donnera le signe + au moment de la force qui tend à faire tourner l'axe de la même manière que la résultante, et le signe — au moment de celle qui tend à le faire tourner en sens contraire; l'application de cette règle rend les signes des formules (5), (6), (7), (8), (9), (10). On peut encore, en supposant toujours que les forces parallèles agissent dans le même sens, auquel cas la résultante agit aussi dans ce sens, observer que

les signes des momens dépendent uniquement de ceux des bras de levier, c'est-à-dire, des longueurs comptées du centre F sur la verge jusqu'aux points où les forces sont appliquées : en sorte qu'en considérant ce point F comme une origine, on prendra avec un même signe celles de ces longueurs qui s'étendent à droite de l'origine, et avec un signe contraire celles qui s'étendent à gauche : il est bien entendu que le moment de la résultante est toujours seul et positif dans un des membres de l'égalité. Si les forces parallèles P', P'' sont dirigées l'une au-dessous, l'autre au-dessus de la transversale, ces forces prendront dans les momens des signes contraires, en sorte que les signes des momens résulteront de ceux des bras de levier et des forces. Cependant, la règle mécanique indiquée précédemment ne souffrira aucune modification, ainsi qu'il sera facile de s'en assurer d'après ce qui va être dit.

Lorsque deux forces parallèles P', P'' agissent dans le même sens, leur résultante est en intensité,

$$R = P' + P'' ;$$

mais si au point C on applique une force $P_{\prime\prime}$ égale et directement opposée à P'', on aura $P'' = -P_{\prime\prime}$, et conséquemment Fig. 23.

$$R = P' - P_{\prime\prime} \ldots (11).$$

Pour connaître le point D d'application de la résultante R, on reprendra la propriété démontrée dans le cas où les forces agissent dans le même sens, savoir

$$P' : P'' :: CD : BD,$$

de laquelle on déduit

$$P' + P'' : P' :: BC : CD = \frac{P' \times BC}{P' + P''},$$

changeant P'' en $-P_{''}$, on a

$$CD = \frac{P'}{P' - P_{''}} BC \ldots (12).$$

La formule (11) fait voir que *la grandeur de la résultante de deux forces parallèles appliquées à deux points d'une verge, et agissant dans des sens contraires, est égale à la différence entre les grandeurs des composantes, et que le sens de son action est celui de la plus grande des composantes.*

La formule (12) fait connaître le point d'application de la résultante, et si l'on suppose $P' > P_{''}$, le rapport $\frac{P'}{P' - P_{''}}$ est > 1, en sorte que $CD > CB$; donc alors, la résultante agit dans le sens de P', et son point d'application est à gauche de B. Si au contraire on a $P' < P_{''}$, la résultante R agit dans le sens de $P_{''}$, et la distance CD qui devient négative, doit se porter de C en D', en sens contraire de CD.

Il est facile de voir que le point d'application de la résultante des deux forces parallèles $P' - P''$ ne peut tomber entre ceux des composantes : car l'une de ces forces doit faire équilibre à l'autre, et à la résultante R appliquée en sens contraire : elle doit donc détruire la résultante de ces deux forces, ce qui ne peut arriver à moins que cette résultante ne soit égale et directement opposée à la force qui la détruit ; donc le point d'application de la résultante doit toujours laisser d'un même côté les points d'application des composantes.

Moins la force $P_{''}$ diffère de P', plus la résultante $R = P' - P_{''}$ diminue, plus la valeur de CD augmente ; et enfin lorsqu'on a $P' = P_{''}$, le calcul donne une résultante nulle agissant à une distance infinie des co-

posantes, et comme on ne peut pas construire une distance infinie, on est averti, par ce résultat, de l'impossibilité de faire équilibre, à l'aide d'une force unique, à deux forces égales contraires et non directement opposées. C'est ce qu'on peut encore démontrer comme il suit. Cette force unique devrait être dans le plan des composantes P' et $-P_{\prime\prime}$; mais quelle que soit la position qu'on lui donne dans ce plan à l'égard de la force P', on lui en trouvera une autre parfaitement symétrique et de sens contraire par rapport à la force $-P_{\prime\prime}$. Cette résultante aurait donc à-la-fois deux positions différentes, ce qui est absurde. De tout cela on conclut qu'il faut, pour l'équilibre, que chacune des forces P' $-P_{\prime\prime}$ soit détruite séparément.

M. *Poinsot*, dans son excellent Traité de Statique, appelle *couple* l'ensemble de deux forces telles que... P' $-P_{\prime\prime}$, égales, parallèles, contraires, mais non appliquées au même point. La perpendiculaire menée entre les directions des deux forces, est dite *bras de levier du couple*; et le produit de ce bras de levier par l'une des forces est le *moment*. L'auteur procède sur ces couples par voie de composition, et de décomposition, en les considérant soit dans le même plan, soit dans des plans parallèles, soit enfin dans des plans quelconques.

THÉORÈME XII. *Deux forces* P et — P, *formant un couple, peuvent être remplacées d'une infinité de manières différentes par deux autres forces égales qui différeront des premières en grandeur et en direction.*

C'est ce que M. *Poinsot* démontre comme il suit. Soient les deux forces P — P appliquées aux deux Fig. 24.

extrémités d'un bras de levier AB, et prenons sur le prolongement de AB une partie quelconque BC, et appliquons sur BC parallèlement aux forces $P-P$ deux couples $Q-Q$; $Q'-Q'$ égaux et contraires; leur effet sera absolument nul, et par conséquent celui du couple $P-P$ ne sera pas changé; mais si l'on suppose que les forces P et Q et par conséquent P et Q' sont en raison inverse des lignes AB, BC, leur résultante qui est égale à $P+Q'$ passe en B et elle détruit évidemment les forces contraires $-P-Q'$ qui sont appliquées à ce point. On peut donc supprimer les quatre forces P, Q', $-P$, $-Q'$, et il ne reste plus que le couple $Q-Q$ appliqué sur BC, lequel remplace le couple proposé $P-P$ appliqué sur AB. Ce théorème trouvera son application par la suite.

Probl. Nous ferons quelques applications des principes que nous venons de démontrer.

Fig. 25. Nous supposerons d'abord qu'on ait à décomposer une force R en deux autres forces P' et P'' parallèles à la direction de R, et appliquées à des points B et C : on a cette proportion,

$$P' : P'' :: DC : DB,$$

de laquelle on tire les deux suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} P'+P'' : P' : BC : DC \\ P'+P'' : P'' :: BC : DB \end{array}\right| \text{d'où} \left|\begin{array}{l} P' = R \times \dfrac{CD}{BC} \ldots (13) \\ P'' = R \times \dfrac{BD}{BC} \ldots (14) \end{array}\right.$$

On connaît donc les intensités des composantes qui, appliquées en B et C, remplacent l'effet de R.

Si les grandeurs de P' et P'' étaient données, et qu'il

fallût trouver leurs points d'application, on déduirait des relations (13) et (14) ces longueurs des bras de levier.

$$DC = \frac{P'}{R} \times BC,$$

$$BD = \frac{P''}{R} \times BC.$$

On pourrait donner la grandeur de l'une des forces et son point d'application, ou la grandeur de l'une et le point d'application de l'autre.

Qu'il s'agisse maintenant de décomposer la force R en trois composantes parallèles appliquées aux points B, C, E. Fig. 26.

On pourra prendre sur BC un point K arbitraire, et décomposer, d'après ce qui vient d'être dit, la force R en deux forces P''' et R' parallèles à la direction de R et appliquées en E et K ; puis on décomposerait R' en deux forces P' et P'' parallèles à R et appliquées en B et C. Mais comme le point K a été pris arbitrairement, les grandeurs des composantes sont pareillement arbitraires. Le problème proposé est donc indéterminé : et il le serait, *à fortiori*, pour un plus grand nombre de points en ligne droite.

Mais si les trois points d'application B, C, E ne sont plus en ligne droite, et que D soit le point d'application de la force R à décomposer ; on joindra le point E, par exemple, et le point D par une droite ED qui, Fig. 27. prolongée, rencontrera en K la droite BC, et on décomposera d'abord R dans les deux forces P''' et R' parallèles à R et appliquées en E et K : puis R' en deux forces P' et P'' parallèles à R et appliquées en B et C. Ce problème est visiblement déterminé.

Si les quatre points d'application de la force unique

R, appliquée en D, sont les quatre sommets du quadrilatère $BCEF$; on mènera, par CD, une droite qu'on
Fig. 28. prolongera d'une longueur arbitraire DK, et on décomposera R en P'' et R' parallèles à R et appliquées en C et K; puis prolongeant BK jusqu'à la rencontre de EF en G, on décomposera R' en deux forces parallèles P' et R'' appliquées en B et G, puis R'' en deux forces P''' et P^{iv} parallèles et appliquées en E et F. Le problème sera donc résolu, mais on remarquera qu'il y a indétermination, parce que la longueur DK a été prise arbitrairement, et que les grandeurs des forces P''' et P^{iv} varient avec la position du point G qui est subordonnée à celle du point K.

Ces remarques trouveront leur application dans la théorie du plan incliné, lorsqu'il s'agira d'évaluer les pressions qu'un corps posé sur un tel plan et soumis à l'action des forces qui le pressent contre ce plan, exerce en chacun des points de contact ou d'appui sur le plan incliné, parce que la résultante de toutes les forces qui agissent sur ce corps, laquelle doit être normale au plan incliné, sera la force à décomposer en d'autres forces normales, et conséquemment parallèles, agissant aux points d'appui et représentatives des pressions en ces points.

CHAPITRE III.

Théorie des Forces parallèles, indépendante du parallélogramme des Forces : autre démonstration du parallélogramme.

COMME les propriétés précédentes des forces parallèles supposent le parallélogramme des forces qu'on peut réciproquement conclure des forces parallèles, nous allons établir la théorie des forces parallèles indépendamment du parallélogramme.

Que l'on suppose dans la démonstration de la proposition (pag. 35 et 36), $P' = P'' = Q' = Q''$, les résultantes R' et R'' diviseront également les angles entre les forces Q' et P', Q'' et P'' (*not. prél.*); la direction de la résultante R sera toujours parallèle à la direction commune des composantes; R toujours $= P' + P''$, et le point d'application D sera au milieu de la droite BC. Fig. 21.

Réciproquement, on peut remplacer l'effet de R sur une droite par celui de deux forces p et q égales, parallèles à R, équidistantes de R, et telles qu'on ait..... $R = p + q$, d'où il suit qu'on peut aussi substituer à une force R tant d'autres forces qu'on voudra p, q, r, etc., égales entre elles, parallèles à R, deux à deux équidistantes de R, et telles qu'on ait................. $R = p + q + r + s +$, etc. Fig. 29.

Cherchons maintenant le point d'application de deux forces P' et P'' parallèles et inégales, et supposons d'abord ces forces commensurables, en sorte que p étant Fig. 30.

la force avec laquelle on mesure P' et P'', on ait..... $P' = mp$, $P'' = np$. Partageons la droite BC en K, de manière que $BK : KC :: m : n$, et prolongeons BC de $BA = BK$ et de $CE = CK$. On pourra supposer

$$P' = (m - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2})\, p, \; P'' = (n - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2})\, p,$$

de sorte que si l'on divise AK en m et EK en n parties égales, et qu'on applique à chacun des $m - 1$ points de division de AK, et des $n - 1$ points de division de KE une force p, puis à chacune des extrémités A et K, K et E une force $\frac{1}{2}p$, ce qui donnera une force p en K, on aura en chacun des points extrêmes A et E une force $\frac{1}{2}p$, et en chacun des $m + n - 1$ points intermédiaires et également espacés, une force p, et toutes ces forces élémentaires ainsi distribuées remplaceront, quant à l'effet sur la droite, les forces données P' et P''. Or, ces forces partielles étant parallèles, égales deux à deux, et à des distances égales des points A et E, leur résultante sera égale à leur somme, parallèle à leur commune direction, et son point d'application est D milieu de AE. Or, $AD = BC$, puisque chacune de ces longueurs est la moitié de AE; soustrayant du premier membre AB, et du second son égal BK, il reste $BD = KC$: ajoutant DK aux deux membres de cette dernière égalité, il vient $BK = DC$. Conséquemment la proportion $BK : KC :: m : n$ devient

$$DC : BD :: m : n :: mp : np :: P' : P'',$$

donc *le point d'application de la résultante de deux forces parallèles commensurables* P', P'' *appliquées aux extrémités d'une droite* BC, *la divise en deux parties réciproquement proportionnelles à ces forces : de plus la direction de cette*

résultante est parallèle à la commune direction des composantes ; et sa grandeur est la somme de leurs grandeurs.

Il sera bon de faire cette démonstration pour m et n nombres pairs et impairs, et l'un pair et l'autre impair.

La conclusion précédente est encore vraie dans le cas de l'incommensurabilité des forces.

Dans cette hypothèse, et quelque petite que soit la force p avec laquelle on mesure P' et P'', si on a... $P' = mp$, on aura $P'' = np + p'$, en observant que p' étant $< p$, la force p' peut toujours être rendue plus petite qu'une force donnée, quelque petite qu'elle soit, en faisant croître m et n indéfiniment, c'est-à-dire, en diminuant convenablement l'unité de mesure p. Fig. 51.

Cela posé, soit D un point tel qu'on ait

$$DC : DB :: P' : P'' \ldots (1) ;$$

je dis que D est le point d'application de la résultante de ces forces : car si ce point n'est pas en D, il sera, par exemple, en K d'abord à gauche de D ; or, en ne prenant de P'' que la portion np, et la composant avec $P' = mp$, le point d'application de la résultante R des forces mp et np devra passer de K en un point I tel qu'on ait, d'après le théorême précédent,

$$mp : np :: IC : IB \ldots (2),$$

et conséquemment le point I sera à la gauche de D, ce qui se déduit des proportions (1) et (2) qui donnent

$$CD = CB \times \frac{P'}{P' + P''} = CB \times \frac{mp}{(n+m)p + p'}$$

$$CI = CB \times \frac{mp}{(n+m)p},$$

d'où on conclut $CI > CD$. D'ailleurs la force p' pouvant, comme nous l'avons dit, être rendue aussi petite qu'on voudra, il en sera de même de la distance DI, et ainsi le point I pourra tomber aussi près qu'on voudra de D, c'est-à-dire, qu'on pourra toujours le supposer entre K et D. Il reste maintenant à composer la force R' appliquée en I, laquelle est la résultante des forces mp et np, avec la force p' appliquée en C, pour avoir la résultante R des forces P' et P''; or, la résultante R' se change en R, lorsque la composante np devient $np + p'$, l'autre composante P' ne variant pas; donc le point d'application de R doit être plus voisin de C que ne l'est celui de R', et conséquemment il ne peut tomber en K à gauche de D, comme on l'a supposé. On peut dire encore que lorsque la composante mp restant la même, la composante np est augmentée de p', le point d'application de la résultante doit passer de I en K, et qu'ainsi cette résultante doit s'éloigner de la composante qui augmente, résultat inadmissible. On prouverait de la même manière, en supposant $P'' = np - p'$ et $P = mp$ que le point d'application de R ne peut tomber à droite de D. Donc, etc.

Il est maintenant facile d'assigner la direction de la résultante de deux forces commensurables et qui concourent.

En désignant toujours par p la force avec laquelle on mesure P' et P'', nous supposerons, ce qui ne nuit en rien à la généralité de la démonstration, $P' = 5p$, $P'' = 3p$, en sorte que $\frac{P'}{P''} = \frac{5}{3}$.

Soient donc les deux forces P' et P'' représentées par les lignes MA et MB, dont la première contient cinq Fig. 32. parties égales et la seconde trois des mêmes parties. On

pourra regarder la force P' comme la résultante de deux forces parallèles $p' = 3p$, $p'' = 2p$ appliquées aux extrémités des bras de levier Mc', Mc'' dont le premier renferme deux des parties égales de MB, et le second trois des mêmes parties. Or, à cause de

$$p' : p'' :: Mc'' : Mc',$$

on aura

$$Mc'' : Mc' :: 3p : 2p :: 3 : 2.$$

Maintenant, si on transporte le point d'application de M en c', le point c' lié au point M sera sollicité par les deux forces égales $p' = P'' = 3p$, en sorte que leur résultante R' divisera également l'angle entre ces composantes. Si l'on prolonge la direction de R' jusqu'à la rencontre de celle de p'' en K, et qu'on suppose les forces R' et p'' immédiatement appliquées à ce point K lié à M, la résultante R de R' et de p'' qui sera celle de p', P'' et p'' ou de P' et P'', devra passer en même tems par les points K et M. Je dis maintenant que R sera dirigée suivant la diagonale MC du parallélogramme construit sur les représentations MA et MB des forces P' et P''. En effet, à cause de l'angle $p'c'R' = R'c'p''$, on a l'angle $Kc'c'' = c''Kc'$; donc, dans le triangle... $Kc'c''$ isocèle, $Kc'' = c'c'' = MA$; d'ailleurs $Mc'' = MB$; donc les triangles MAC et $Kc''M$ sont égaux, et donnent angle $AMC = c''KM$, et parce que les deux lignes MA et Kc'' sont parallèles, la diagonale MC est le prolongement de KM. Donc, etc.

On observera que ce raisonnement s'applique au cas général de $P' = mp$, $P'' = np$, sans autre changement que celui de 5 et 3 en m et n.

Du cas de la commensurabilité, on passe à celui de l'incommensurabilité (Théor. II.), puis on démontre, ainsi qu'on l'a fait (Théor. III), que la résultante est en grandeur la diagonale du parallélogramme construit sur les représentations des forces composantes : viennent ensuite les conséquences de ce dernier théorême, les théorêmes IV et V, et enfin le chapitre II, à l'exception du théorême fondamental des forces parallèles.

CHAPITRE IV.

De la composition des Forces en nombre quelconque, situées dans un plan et dans l'espace.

NOUS avons donné le procédé pour composer en une seule force un nombre quelconque de forces situées soit dans un plan, soit dans l'espace, et qui agissent sur un point matériel supposé libre : cette force unique, qu'on nomme résultante, est nulle dans le cas d'équilibre, et réciproquement lorsque cette résultante est nulle, il y a équilibre.

Nous allons maintenant considérer des forces en nombre quelconque, dirigées dans un même plan, et appliquées à des points matériels formant un système invariable, comme les différens points d'un corps solide ; et à cet effet, nous supposerons ces points liés entre eux par des verges inflexibles et inextensibles.

Soient donc P', P'', P'''.... les forces données situées dans un même plan, et appliquées à des points matériels m', m'', m'''...... Après avoir prolongé les directions des forces P', P'' jusqu'à leur concours, on en déterminera la résultante R' qu'on composera avec la troisième force P''' dont on prolongera la direction jusqu'à celle de R', et on aura la résultante R'' de P', P'' et P''' ; on prolongera la direction de R'' et de P^{iv} jusqu'à leur rencontre, et on trouvera une résultante R''' qui sera celle de P', P'' P''' et P^{iv}. On opérera de cette manière jusqu'à ce qu'on ait employé toutes les forces du système.

L'effet des forces données sur le système des points matériels, sera donc ainsi remplacé par celui d'une force unique. Mais si les deux dernières forces à composer en une seule, savoir la résultante de toutes les forces du système moins une et celle-ci, forment un *couple*, c'est-à-dire, si ces deux forces sont égales, contraires, et non directement opposées, la résultante totale sera bien nulle (pag. 40, 41); cependant comme on ne peut établir l'équilibre dans ce couple qu'au moyen de deux forces égales et directement contraires à chacune des forces du couple, on en conclura qu'on ne peut aussi déterminer l'équilibre du système qu'au moyen de deux forces, et qu'ainsi les forces données ne peuvent comporter une résultante unique.

Nous appellerons *cas d'exception* cette impossibilité de remplacer l'effet de toutes les forces d'un système par celui d'une force unique.

On pourrait assigner la grandeur de la résultante, dans le cas où les forces en admettent une, par le procédé employé à l'égard des forces qui concourent. A cet effet, on imaginera que chaque force du système se déplace parallèlement à sa direction et sans varier de grandeur, de manière à passer par le même point : il est évident qu'on n'aura fait ainsi que transporter la résultante sous sa véritable grandeur, et parallèlement à sa direction primitive : il resterait, après avoir assigné la quantité de cette résultante, à trouver un point de sa direction, question qui est du ressort de l'analyse et que nous ne résoudrons pas ici. Nous nous bornerons à observer que de cette manière, on trouvera, dans le cas d'exception, une résultante nulle, parce qu'alors les deux forces égales, contraires et non appliquées au même point, se trouveront égales, appliquées au même point et directement opposées.



On observera que si l'on réduit toutes les forces du système à trois, ce qu'on peut toujours faire en composant toutes les forces moins deux en une seule, il est nécessaire que l'une des trois forces soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres, pour que l'équilibre dans le système ait lieu de lui-même, ou que ces trois forces concourent, pour que celles du système admettent une résultante unique.

Il est clair que si chaque point du système était sollicité par plusieurs forces, on pourrait toujours, par le parallélogramme, remplacer l'effet de chacun de ces groupes de forces par celui d'une force unique.

Considérons maintenant un nombre quelconque de forces parallèles P', P'', P'''...., appliquées à des points matériels m', m'', m'''.... dans l'espace, liés entre eux d'une manière invariable, et proposons-nous d'assigner la direction, la grandeur et le point d'application de leur résultante.

On pourra composer deux de ces forces P' et P'' en une seule R' dont le point d'application, situé sur la droite $m'm''$, la divisera en deux parties réciproquement proportionnelles à P' et P'' : d'ailleurs R' sera dans le plan des forces P' et P'', sa direction sera parallèle à la commune direction de ces composantes, et on aura $R' = P' + P''$ (pag. 34, 39). On composera ensuite la résultante R', appliquée au point M' de la droite $m'm''$, avec P'''; le point M'' d'application de la résultante R'' divisera la droite $M'm'''$ en deux parties réciproquement proportionnelles à R' et P''', la direction de cette résultante sera encore parallèle à la direction commune des composantes, et on aura $R'' = P' + P'' + P'''$. On passera à la résultante de R'' et P^{IV}, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé la totalité des forces du système. On

parviendra donc ainsi à une dernière résultante R dont on connaîtra le point d'application, dont la direction sera parallèle à celle des forces, et dont la quantité sera égale à la somme des quantités des composantes qui agissent dans un sens, moins la somme de celles des composantes qui agissent dans un sens contraire.

On peut encore réduire toutes les forces du système à deux dont l'une soit la résultante de toutes celles qui agissent dans un sens, et l'autre la résultante des forces dirigées dans le sens contraire : dans le cas d'équilibre, ces deux résultantes seront égales, et elles passeront par le même point : dans le cas où les forces données sont réductibles à une seule force, ces deux forces agiront encore suivant la même droite ; elles seront inégales, et la résultante cherchée, qui sera leur différence, agira dans le sens de la plus grande. Enfin, ces deux résultantes pourront tomber dans le cas d'exception, c'est-à-dire, former un couple : alors les forces données auront deux résultantes non réductibles à une seule.

Nous allons traduire cette question en analyse, en supposant que toutes les forces parallèles du système, agissent dans le même sens, ainsi qu'il arrive lorsque les forces sont celles de la pesanteur, comme on le verra dans le chapitre suivant. Dans le dernier chapitre, nous généraliserons cette solution, et nous traiterons par l'analyse des questions énoncées dans le titre de celui-ci, et dont nous nous bornons ici à tracer les solutions.

Soit donc un nombre quelconque de forces parallèles P', P'', P''', etc., appliquées à des points m', m'', m''', etc., répandus dans l'espace et liés invariablement entre eux, et proposons-nous de déterminer la grandeur de la résultante, et les trois coordonnées de son point d'application, lesquelles dépendront nécessairement des grandeurs

des composantes et des coordonnées de leurs points respectifs d'application.

Considérons d'abord deux de ces composantes P', P'' dont la résultante soit R', et désignons par x', y', z' ; x'', y'', z'', X', Y', Z' les coordonnées de leurs points d'application m', m'', M'. On aura d'abord cette relation entre la grandeur de la résultante et celles des composantes :

$$R' = P' + P'' \ldots (1).$$

Si par les points d'application m', m'', on imagine une droite prolongée jusqu'au plan horisontal en F, et qu'on prenne le point F pour le centre des momens des forces P', P'' et de leur résultante R', on aura cette propriété (pag. 37, form. 5.)

$$R' \times FM' = P' \times Fm' + P'' \times Fm'' \ldots (A),$$

or, les bras de levier FM', Fm', Fm'' sont proportionnels aux ordonnées Z', z', z'' des points M', m', m'' : l'équation (A) devient donc

$$R'Z' = P'z' + P''z'' \ldots (2).$$

Si de même on prolonge la droite $m'm''$ jusqu'à la rencontre du plan des xz en F', et qu'on prenne F' pour centre des momens, la propriété des momens, rapportée à ce point F', sera

$$R' \times F'M' = P' \times F'm' + P'' \times F'm'' \ldots (B).$$

On aurait de même, en imaginant la droite $m'm''$ prolongée jusqu'au plan des yz en F'', et regardant F'' comme le centre des momens,

$$R' \times F''M' = P' \times F''m' + P'' \times F''m'' \ldots (C).$$

Comme les lignes $F'M'$, $F'm'$, $F'm''$; $F''M'$, $F''m'$, $F''m''$

sont visiblement proportionnelles aux coordonnées...... Y', y', y''; X', x', x'', les équations (B) et (C) deviennent

$$R'Y' = P'y' + P''y'' \ldots (3),$$

$$R'X' = P'x' + P''x'' \ldots (4).$$

Les trois équations (2), (3) et (4) assujétissent les points M', m', m'' à être en ligne droite, ou, ce qui revient au même, elles expriment que la résultante se trouve dans le plan des composantes.

On pourra composer de la même manière R' avec P''', et, à cet effet, il ne faudra que changer dans (1), (2), (3) et (4), R', X', Y', Z' en R'', X'', Y'', Z''; P', x', y', z' en R', X', Y' Z' et P'', x'', y'', z'' en P''', x''', y''', z''', ce qui donnera

$$\begin{aligned} R'' &= R' + P''' \\ R''Z'' &= R'Z' + P'''z''' \\ R''Y'' &= R'Y' + P'''y''' \\ R''X'' &= R'X' + P'''x''', \end{aligned}$$

c'est-à-dire, après les substitutions pour R', $R'Z'$, $R'Y'$, $R'X'$ de leurs valeurs (1), (2), (3) et (4)

$$\begin{aligned} R'' &= P' + P'' + P''' \\ R''Z'' &= P'z' + P''z'' + P'''z''' \\ R''Y'' &= P'y' + P''y'' + P'''y''' \\ R''X'' &= P'z' + P''x'' + P'''x''', \end{aligned}$$

Lorsqu'enfin on aura ainsi composé toutes les forces en une seule que nous désignerons par R, on aura, pour déterminer la grandeur de R et les coordonnées X, Y, Z, de son point d'application, ces quatre équations,

$$(N)\left\{\begin{aligned}R &= P' + P'' + \text{etc.}\\ RX &= P'x' + P''x'' + \text{etc.}\\ RY &= P'y' + P''y'' + \text{etc.}\\ RZ &= P'z' + P''z'' + \text{etc.}\end{aligned}\right| \text{qui donnent les quatre inconnues} \left|\begin{aligned}R &= P' + P'' + \text{etc.}\\ X &= \frac{P'x' + P''x'' + \text{etc.}}{P' + P'' + \text{etc.}}\\ Y &= \frac{P'y' + P''y'' + \text{etc.}}{P' + P'' + \text{etc.}}\\ Z &= \frac{P'z' + P''z'' + \text{etc.}}{P' + P'' + \text{etc.}}\end{aligned}\right\}(M),$$

On appelle *moment d'une force par rapport à un plan*, le produit d'une force par la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur le plan. Ainsi les trois dernières des équations (N), c'est-à-dire, celles qui donnent $R.X$, $R.Y$, $R.Z$, renferment le théorême des momens des forces parallèles dans l'espace par rapport à trois plans rectangulaires. Les signes de ces momens ne dépendront ici que de ceux des coordonnées, puisque toutes les forces sont supposées agir dans le même sens.

Corollaire Ier. Si tous les points d'application des forces parallèles, sont dans un même plan, celui de leur résultante est aussi dans ce plan : car si, par exemple, les points m', m'', etc., sont dans le plan horisontal ou des x, y, les coordonnées verticales z', z'', z''', etc., sont nulles, et conséquemment $Z = 0$. Si tous les points d'application sont sur une droite, par exemple, sur l'axe des x, alors les coordonnées y' et z', y'' et z'' etc. deviennent nulles, et on a aussi $Y = 0$, $Z = 0$. Donc le point d'application de la résultante est aussi dans l'axe des x;

Corollaire II. Les expressions des coordonnées X, Y, Z restent les mêmes, lorsque toutes les forces du système tournent en même tems et de la même manière autour de leurs points respectifs d'application, sous leurs grandeurs primitives, parce qu'en effet ces expressions sont indépendantes

de la commune inclinaison de ces forces sur l'un quelconque des trois plans rectangulaires. On appelle *centre des forces parallèles* le point par lequel passe continuellement la résultante des forces parallèles, lorsqu'elles tournent ainsi sous la condition de rester parallèles et d'être toujours appliquées aux mêmes points. Les coordonnées X, Y, Z demeurent encore les mêmes, lorsque les forces composantes P', P'', etc., deviennent mP', mP'', etc., comme le montrent les trois dernières formules (M);

Coroll. III. Enfin, si toutes les forces P', P'' sont égales, on a, en désignant leur nombre par n,

$$X=\frac{x'+x''+x'''+\text{etc.}}{n},\quad Y=\frac{y'+y''+y'''+\text{etc.}}{n},$$

$$Z=\frac{z'+z''+z'''+\text{etc.}}{n},$$

c'est-à-dire qu'alors le point d'application de la résultante, est le *centre des moyennes distances* des points d'application des composantes aux trois plans rectangulaires auxquels ils sont rapportés.

Nous considérerons enfin un système de forces quelconques appliquées à un corps solide, ou à des points liés invariablement entre eux : mais nous ferons précéder la solution de cette question de la démonstration du lemme suivant.

LEMME. *Un couple quelconque peut être transporté partout où l'on voudra dans son plan, et même dans tout autre plan parallèle, et tourné comme on voudra dans ce plan, sans que son effet sur le corps auquel il est appliqué, soit changé, pourvu qu'on suppose le nouveau bras de levier invariablement lié au premier.*

1°. Soit le couple de forces $P-P$, appliqué per-

pendiculairement sur AB : prenons arbitrairement, dans le plan de ce couple, ou plus généralement dans tout autre plan parallèle, la droite CD égale et parallèle à AB : joignons les points A et D, B et C par des droites qui seront visiblement dans un même plan, et se couperont conséquemment au milieu I de leurs longueurs respectives, et supposons enfin les droites AB et CD liées invariablement entre elles. Si l'on applique sur la ligne CD parallèlement aux forces $P - P$, deux couples $P' - P'$, $P'' - P''$ égaux entre eux et au couple proposé $P - P$, il est évident que l'effet du couple primitif ne sera pas changé; mais d'un autre côté, les deux couples $P - P$, $P'' - P''$ se détruisent d'eux-mêmes ; car, le point I étant à-la-fois le milieu des deux lignes AD, BC, les deux forces égales et parallèles P et P'', appliquées sur AD, donnent une résultante égale et directement opposée à celle des deux forces $- P - P''$ appliquées sur BC : conséquemment il ne reste plus que le couple primitif qu'on aurait transporté parallèlement au plan de ses deux forces, de manière que son bras de levier fût venu dans la position parallèle CD. Fig. 33.

2°. Soit le couple $P - P$, appliqué perpendiculairement sur AB ; tirons dans le plan de ce couple, qui sera si l'on veut le plan de la planche, et sous un angle quelconque avec AB, la droite $CD = AB$, et supposons que ces deux droites se coupent au milieu I de leurs longueurs respectives. Si l'on applique à angle droit sur CD, et dans le plan du couple $P - P$, deux couples contraires, égaux entre eux et au couple proposé, ces deux couples se détruisent d'eux-mêmes, et par conséquent, l'effet du couple primitif $P - P$ n'est pas changé : mais les deux couples $P - P$, $P'' - P''$ se détruisent d'eux-mêmes : car, les deux forces égales P Fig. 34.

et $-P''$ se rencontrent en G, et donnent une résultante égale et directement opposée à celle des deux forces $-P$ et P'' qui se rencontrent en H, en observant que la ligne GH qui passe par I, divise également les angles AGC, DHB, et conséquemment leurs opposés aux sommets. On peut donc supprimer les deux couples $P-P$, $P''-P''$, et il ne reste plus que le couple $P'-P'$ appliqué sur CD, lequel n'est que le couple primitif qu'on aurait tourné dans son plan, de manière que le bras de levier passant par le milieu de AB, fût venu dans la position oblique CD.

De ces deux propositions on conclut facilement l'énoncé du lemme.

Revenons à la question ; nous chercherons à décomposer toutes les forces données en deux groupes de forces, les unes dans le plan des xy, les autres perpendiculaires à ce plan, parce qu'alors le problême sera ramené à deux autres qu'on sait résoudre.

Désignons toujours les forces par P', P'', P'''.... et les points matériels qu'elles sollicitent par m', m'', m'''... en ne supposant qu'une force pour un point : on pourra décomposer la force P' autour de son point d'application en trois forces parallèles aux axes des coordonnées, supposés rectangulaires (pag. 15), et ayant opéré de la même manière sur toutes les autres forces, il ne s'agira plus que de ramener à un même plan celles qui composent deux de ces groupes, par exemple, les forces parallèles aux axes des x et des y, en conservant telles qu'elles sont les forces parallèles à l'axe vertical des z.

On observera que, sans altérer le système des forces que l'on considère, il est permis d'appliquer à chacun des points m', m'', m'''.... deux forces égales et directement contraires : ainsi en m', nous appliquerons paral-

lèlement à l'axe des z, par exemple, deux forces égales et opposées $+g'$, $-g'$. Composant alors $+g'$ avec $P'^{(x)}$ qui représentera la composante de P' parallèle à l'axe des x, et prenant pour point d'application de la résultante le point M', où elle perce le plan horisontal des xy, on décomposera cette résultante en ce point en deux forces parallèles aux axes des x et des z, décomposition qui reproduit les forces $+g'$ et $P'^{(x)}$ dont la dernière est dans le plan des xy suivant la projection sur ce plan de la composante $P'^{(x)}$ dans l'espace; et on sait que ces deux forces sont appliquées au point M' supposé invariablement lié au point m'.

En opérant de la même manière sur les forces $-g'$, $P'^{(y)}$ qui représente la composante de P' suivant la parallèle à l'axe des y, on aura une résultante dont la direction prolongée ira percer le plan horisontal en un point M, toujours lié au point m', et on la décomposera en M, en deux forces qui seront $-g'$ et $P'^{(y)}$ dont la seconde sera située dans le plan horisontal suivant la projection sur ce plan, de $P'^{(y)}$ dans l'espace, et la première $-g'$ sera perpendiculaire en M, au plan des xy.

On ramènera par le même procédé, dans le plan des xy, toutes les forces $P''^{(x)}$, $P'''^{(x)}$.... $P''^{(y)}$, $P'''^{(y)}$.... qui sont les composantes de P'', P'''.... suivant les axes des x et y, et on aura parallèlement à l'axe des z autant de forces g'', $-g''$; g''', $-g'''$, etc.

On a donc réduit toutes les forces du système à deux groupes de forces dont les unes $P'^{(x)}$, $P''^{(x)}$.... $P'^{(y)}$, $P''^{(y)}$.... sont situées dans le plan horisontal, et les autres $+g'$, $-g'$; $+g''$, $-g''$.... $P'^{(z)}$, $P''^{(z)}$...., sont perpendiculaires à ce plan, en observant que $P'^{(z)}$, $P''^{(z)}$.... représentent les composantes de P', P''.... en m', m''.... parallèles à l'axe des z. Les forces de

ces deux groupes étant perpendiculaires, l'indépendance des effets a lieu d'une manière absolue, comme nous allons le démontrer, en sorte qu'il ne peut y avoir équilibre dans le système donné, sans qu'il y ait séparément équilibre dans chacun de ces groupes.

Pour démontrer cette proposition, nous supposerons que les deux groupes précédens puissent être en équilibre, sans qu'il y ait équilibre entre les forces parallèles à l'axe des z : il est évident qu'on ne troublera pas cet équilibre, en fixant une droite dans le plan des xy dans une position quelconque ; mais alors toutes les forces situées dans ce plan seront détruites par la résistance de cette droite : au contraire les forces perpendiculaires à ce plan, qui ne s'entre-détruisent pas, d'après l'hypothèse, produiront un mouvement de rotation autour de l'axe fixe ; d'où il suit que l'équilibre n'aura pas lieu. Ainsi, pour l'équilibre, les forces perpendiculaires au plan xy, doivent s'entre-détruire entre elles, et il doit en être de même des forces situées dans ce plan.

Il faudra bien observer que l'indépendance en question aura encore lieu lorsque le plan parallèle à la direction des forces du premier groupe, tombera sous un angle quelconque sur le plan xy du second groupe ; qu'ainsi l'indépendance n'a pas lieu, parce que les deux groupes font un angle droit, mais parce qu'ils font un angle.

Lorsque les forces P, P''.... ne se font pas équilibre, on peut demander de les réduire au moindre nombre possible. Si chacun des deux groupes de forces se réduit à une seule force, et si ces deux résultantes se trouvent dans un même plan, on pourra les composer en une seule qui sera la résultante unique des forces données.

Supposons que les forces parallèles à l'axe des z se réduisent à une seule, et que les forces situées dans le plan des xy se réduisent à un couple ; on peut, en transformant ce couple en un autre (lem. précéd.), donner à celui-ci une position telle, dans le plan xy, que l'une des forces de ce couple soit rencontrée par la résultante des forces parallèles à l'axe des z, alors les trois forces seront réductibles à deux, situées dans des plans différens. Et si de même les forces parallèles aux z donnent lieu à un couple, on pourra à ce couple et à celui du plan des xy, en substituer deux autres tels que les quatre résultantes se coupent deux à deux, et on réduira ainsi les quatre forces à deux seulement.

Pour bien concevoir cette réduction des deux couples supposés à deux forces, soit MN la base du levier du couple des deux forces $R^{(z)}$ — $R^{(z)}$ parallèles, contraires et non directement opposées, auxquelles on a réduit les forces parallèles à l'axe des z ; soit AB celui du couple des deux forces P — P parallèles, contraires et non directement opposées auxquelles on a réduit les forces dans le plan des xy : on pourra transporter le premier couple parallèlement à lui-même, de manière que le bras de levier MN vienne en $M'N'$, le point I étant le milieu des bras de levier AB et $M'N'$. Or, MN étant $> AB$ perpendiculaire aux forces R et $-P$, si les extrémités M' et N' tombent entre les parallèles, on pourra décrire du point I, comme centre, les arcs $M'm$, $N'n$ qui couperont en a et b les directions des forces P et $-P$, et faire tourner le bras de levier $M'N'$ jusqu'à ce qu'il vienne en ab : alors la force $R^{(z)}$ appliquée en a se composera avec la force P appliquée au même point ; pareillement la force $-R^{(z)}$ appliquée en b se composera avec $-P$ au même point : ainsi les deux couples seront Fig. 35.

réduits à deux forces qui ne pourront se composer en une seule. Si les extrémités M et N tombent en M'' et N'' hors des parallèles, on décrira toujours du centre I avec $IM'' = IN''$ des arcs qui couperont les parallèles en a' et b', et le bras du levier du couple des forces verticales, ayant la position $a'b'$, la réduction des deux couples à deux forces aura encore lieu. On pourra, *à fortiori*, ramener à deux forces le couple et la force, réduction de toutes les forces données dans la première hypothèse.

Ainsi les forces P', P''.... admettent toujours une, ou au plus deux résultantes.

Il reste maintenant à démontrer que deux forces situées, comme les deux précédentes, dans deux plans différens, ne sauraient être remplacées par une force unique. En effet, si ces deux forces comportaient une résultante, il s'ensuit qu'en rendant fixe un point pris au hasard sur la direction de cette résultante, les deux forces données seraient en équilibre autour de ce point fixe ; or cet équilibre est impossible, car on peut mener par ce point une ligne qui coupe la direction de l'une des composantes, sans être comprise dans l'un quelconque des plans qui passeraient par l'autre, de sorte qu'en rendant cette ligne fixe, l'action de celle des composantes qui passerait par un des points de cette ligne fixe, serait détruite, et rien n'empêcherait l'autre de faire tourner le corps ou le système de points matériels autour de cet axe fixe. Ainsi, les deux composantes n'étant pas en équilibre autour d'un axe fixe, ne le seront pas, *à fortiori*, autour d'un point fixe, puisqu'il faudrait qu'elles le fussent autour de deux axes menés par ce point ; et conséquemment elles ne pourront admettre une résultante unique.

CHAPITRE V.

De la Pesanteur, des Centres de gravité, et usage de ces centres pour déterminer les surfaces et les volumes des solides de révolution.

On nomme *pesanteur* ou *gravité* cette cause inconnue qui fait descendre les corps vers la terre, lorsqu'ils sont abandonnés à eux-mêmes.

La pesanteur étant une cause du mouvement, on peut la considérer comme une force.

Jusqu'à présent, nous avons fait abstraction de cette force; nous allons en tenir compte.

Cette force de la pesanteur pénètre les parties les plus intimes des corps, et agit également sur toutes les molécules. Car l'expérience prouve que, dans le vide, des corps quelconques, une masse de plomb, et le duvet le plus léger, tombent de la même hauteur, dans le même tems, c'est-à-dire, avec la même vitesse. Ainsi l'action de cette force se fait sentir également aux molécules les plus ténues de chaque corps, et agit sur elles comme si elles étaient simplement contigues.

Cependant l'intensité de la pesanteur n'est pas rigoureusement la même dans deux lieux différens du globe terrestre, ou, en d'autres termes, la même molécule placée dans deux lieux différens, ne tomberait pas avec la même vitesse; la pesanteur varie à la

surface de la terre, depuis l'équateur où elle est la plus petite, jusqu'au pôle où elle est la plus grande : de plus, elle diminue pour un même lieu, à mesure que la molécule s'éloigne davantage du centre de la terre ; et elle décroît comme le carré de cette distance augmente.

La direction de la pesanteur est fort bien représentée par celle d'un *fil-à-plomb* en équilibre, ou d'une perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles.

Cette direction se nomme *verticale*, et tout plan perpendiculaire à cette verticale, se nomme *plan horisontal.*

La surface de la terre, ou plutôt celle des mers, étant à-peu-près sphérique, les directions de la pesanteur vont sensiblement concourir au centre du globe. Ainsi, à mesure que l'on change de lieu sur la terre, la verticale change aussi bien que le plan horisontal.

Mais comme la convergence des directions de la pesanteur, est insensible dans l'étendue que peuvent avoir les plus grands corps sur lesquels l'homme agit, soit immédiatement, soit par l'intermédiaire de machines, nous regarderons les molécules de ces corps comme animées par de petites forces parallèles, égales et agissant dans le même sens. Nous pourrons donc appliquer aux forces qui proviennent de la gravité, tout ce que nous avons dit des forces parallèles qui sollicitent dans le même sens des points matériels liés entre eux d'une manière variable. Ainsi

La résultante de toutes les forces de la pesanteur, leur est parallèle ou, en d'autres termes, sa direction est verticale ; en second lieu, cette résultante est égale à leur somme.

La grandeur ou la quantité de cette résultante, est ce qu'on nomme *poids* du corps: d'où l'on voit que le poids

d'un corps est proportionnel au nombre des molécules qui le composent, ou à la quantité de matière qu'il renferme, et que l'on nomme sa *masse*.

Il faut donc soigneusement distinguer entre la *pesanteur* ou *gravité* et le *poids*; la pesanteur est la cause qui attire les corps vers la terre, c'est la petite force qui agit sur chaque molécule; le poids est la somme de ces forces qui varie en passant d'un corps à un autre, puisqu'elle dépend du nombre des molécules; c'est l'effort qu'il faut faire pour soutenir ce corps, c'est-à-dire, pour détruire l'effet total de toutes les composantes partielles et parallèles.

Nous avons vu que des forces parallèles appliquées à différens points liés entre eux d'une manière invariable, ont un *centre*, c'est-à-dire, un point unique par lequel passent continuellement les résultantes successives, lorsqu'on fait tourner toutes les forces parallèlement et sous leurs grandeurs primitives, autour des points d'application; il s'ensuit donc que comme tout corps n'est qu'un système invariable de points matériels, à cause des *pores* ou des intervalles entre ses molécules, il y a dans chaque corps pesant un point unique par lequel passe continuellement la direction du poids, lorsque l'on tourne le corps dans différentes positions à l'égard des plans coordonnés. En effet, les forces de la pesanteur qui sollicitent toutes les molécules, ne cessent pas, dans toutes ces positions du corps, d'agir aux mêmes points et d'être parallèles, et par conséquent les résultantes successives de ces forces se coupent continuellement dans le même point. Ce point unique se nomme *centre de gravité*.

Si donc le centre de gravité est fixe, ou s'il est soutenu par une force suffisante, le corps restera en équilibre autour de lui dans toutes ses positions.

Mais puisque toutes les forces de la pesanteur sont égales, la position du centre de gravité ne dépend donc plus que de la position des molécules du corps les unes à l'égard des autres, et du nombre de ces molécules : car si la figure et le volume du corps restant les mêmes, les molécules viennent à s'écarter dans une partie du corps, et conséquemment à se rapprocher dans une autre, les forces élémentaires qui agissent sur elles, n'étant plus réparties de la même manière, la position de la résultante générale changera, et conséquemment le centre de gravité du corps sera déplacé.

La densité est la quantité de molécules contenues sous l'unité de volume. Une substance est donc dite plus dense qu'une autre, lorsqu'elle a plus de masse ou plus de matière sous un égal volume.

La densité relative de deux corps, n'est donc autre chose que le rapport de leurs poids sous le même volume ; par conséquent, si l'on veut former une table de densités des diverses espèces de corps solides ou fluides, on prendra pour unité la densité d'une substance convenue, et l'on déterminera, par l'expérience, le rapport des poids d'un volume quelconque de chaque corps, à celui d'un volume égal de la substance convenue. L'eau distillée est le corps que l'on prend ainsi pour terme de comparaison ; mais comme sa densité varie avec sa température, on prend pour unité la densité de ce fluide au point de la plus grande condensation, qui répond à environ 4° du thermomètre centigrade ; ainsi, quand on dit par exemple, que la densité de l'or est 19, on entend par là que le poids d'un volume quelconque de ce métal, est égal à dix-neuf fois celui d'un égal volume d'eau distillée au *maximum* de densité, c'est-à-dire, de condensation.

C'est aussi le poids d'un centimètre cube de cette eau qui est notre unité de poids, ou *le gramme;* de manière que le poids d'un corps évalué en grammes, est égal au produit de sa densité par son volume évalué en centimètres cubes.

Il résulte de toutes ces notions que si l'on désigne par P le poids d'un corps, par V son volume, sa densité par D, et par g la gravité du lieu où l'on considère le poids P, on aura

$$P = VDg.$$

Dans cette équation où les quantités P, V, D, g ne sont pas de même nature, il convient de remarquer que ces lettres représentent des nombres abstraits; savoir, les rapports des quantités correspondantes à des unités arbitraires de l'espèce de chacune d'elles. Ainsi V exprime le nombre d'unités cubiques que renferme le volume du corps que l'on considère; D le rapport numérique de sa densité à celle de l'eau que l'on prend pour unité; g le rapport de la pesanteur relative à l'endroit de l'espace qu'occupe le corps, à la pesanteur que l'on choisit pour unité de force, et qui se rapporte à un lieu déterminé. L'unité de poids est alors celui d'une unité cubique d'eau, transporté en ce dernier lieu, et P désigne le nombre de ces unités que contient le poids du corps.

Dans la détermination du centre de gravité d'un corps d'une densité variable, il faut avoir égard non-seulement à la figure du corps, mais encore à la loi suivant laquelle cette densité varie.

Mais si l'on suppose, ainsi qu'on le fait communément, le corps parfaitement *homogène*, c'est-à-dire, uniformément dense dans toute son étendue, la position du centre de gravité ne dépendra plus que de la figure du corps,

et sa détermination ne sera plus qu'un simple problème de géométrie.

Lors donc qu'on voudra trouver le centre de gravité de plusieurs corps, on pourra supposer la masse de chacun d'eux concentrée en son centre de gravité, puisque le poids est une force proportionnelle à la masse, et qui passe par ce centre : on n'aura donc plus qu'à considérer un système de points matériels liés invariablement entre eux, et sollicités par des forces représentatives des poids de ces corps, forces qui seront parallèles. Le point d'application de la résultante, sera le centre de gravité du système.

THÉORÈME XIII. *Toute figure homogène dans laquelle il se trouve un point tel qu'un plan quelconque mené par ce point, la divise en deux parties parfaitement symétriques, a son centre de gravité en ce point que l'on nomme* centre de figure.

En effet, si l'on fait passer un plan quelconque par le centre de figure, comme ce plan coupe le corps en deux parties parfaitement symétriques, c'est-à-dire, en deux parties dont chacune renferme le même nombre de points matériels, il n'y a pas de raison pour que le centre de gravité, qui est un point unique, et dont la position dépend de celles des molécules et de leur nombre, se trouve d'un côté de ce plan plutôt que de l'autre : il sera donc dans ce plan, et conséquemment à la commune intersection de trois de ces plans, laquelle est un point.

Nous allons appliquer ces notions.

PROBLÈME. *Trouver le centre de gravité d'une ligne homogène.*

Le centre de gravité d'une ligne pesante, homogène, c'est-à-dire, uniformément grosse et dense dans toute son étendue, est dans son milieu. Ce point étant soutenu, la ligne est en équilibre. On pourra donc réduire toute ligne à ce point sollicité par une force égale à son poids; mais comme le poids est proportionnel à la masse, ou au nombre total des molécules, il le devient, dans le cas de l'homogénéité, au volume, ou enfin à la longueur de la ligne.

PROBLÈME. *Trouver le centre de gravité du contour d'un triangle.*

Les côtés du triangle étant homogènes, on supposera la masse de chacun de ces côtés, concentrée en son milieu, et ce point sollicité par une force égale au poids du côté, ou proportionnelle à sa longueur : joignant ces milieux par des droites, on formera un triangle semblable au triangle proposé; partageant les angles de ces derniers triangles en deux parties égales par des droites, leur intersection donnera le centre de gravité cherché, lequel sera le centre du cercle inscrit au second triangle. En effet, si l'on désigne par P', P'', P''' les forces parallèles Fig. 36. appliquées au milieu m', m'', m''' des côtés BA, AC, BC, et si M est le point d'application de la résultante des forces P' et P''; on aura (pag. 36.)

$$P' : P'' :: Mm'' : Mm', \text{ d'où } Mm'' = m'm'' \times \frac{P'}{P' + P''},$$

et conséquemment (pag. 69, 70)

$$Mm'' = m'm'' \times \frac{AB}{AB + AC} = m'm'' \times \frac{m''m'''}{m''m''' + m'm'''},$$

en observant que les poids P' P'' sont proportionnels aux

côtés AB, AC, et que ces côtés sont doubles de $m''m'''$ et $m'm'''$. Or, si l'on joint les points M et m''' par une droite, laquelle devra contenir le centre de gravité cherché, on démontrera aisément que cette droite divise également l'angle $m'm'''m''$, puisqu'on sait que les segmens $m'M$, Mm'' sont proportionnels aux côtés $m'm'''$, $m''m'''$: le centre de gravité G devant se trouver sur chacune des lignes qui divisent également les angles en m'' et m', sera nécessairement le centre même du cercle inscrit au triangle $m'm''m'''$.

Problème. *Trouver le centre de gravité du contour d'un polygone quelconque.*

Tous les côtés du périmètre étant des droites matérielles homogènes, c'est-à-dire, uniformément grosses et denses, on regardera chacune de ces droites comme concentrée en son centre de gravité qui sera le milieu de chaque côté, et l'on n'aura plus qu'à considérer un assemblage ou un système invariable de points matériels sollicités par des forces parallèles et proportionnelles aux poids, ou aux volumes, ou enfin aux longueurs des côtés. On pourra donc chercher le point d'application de la résultante de toutes ces forces, qui sera le centre de gravité, par le principe de la composition des forces parallèles.

Fig. 37. Ainsi, m', m'', m'''.... étant les milieux des côtés du polygone, on aura en ces points des forces P', P'', P'''.... parallèles et proportionnelles aux côtés AB, BC, CD.... le point d'application de la résultante des deux forces parallèles P', P'' sera donné par la proportion

$$P' : P'' :: Mm'' : Mm',$$

d'où

$$m''M = m'm''. \frac{P'}{P' + P''} = m'm'' \times \frac{AB}{AB + BC};$$

on composera de la même manière la résultante $P' + P''$ avec P''', et son point d'application M' sera donné par

$$P' + P'' : P''' :: M'm''' : M'M,$$

d'où (pag. 69, 70)

$$m'''M' = Mm''' \times \frac{P' + P''}{P' + P'' + P'''} = Mm''' \times \frac{AB + BC}{AB + BC + CD};$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé toutes les forces représentatives des poids des côtés. Le point G sera le centre de gravité cherché.

THÉORÈME XIV. *Le centre de gravité de l'aire d'un triangle, est sur la droite menée du sommet au milieu de la base, et au tiers de cette droite à partir de la base.*

Si l'on joint le point A avec le milieu D du côté opposé BC, cette ligne AD divisera la surface du triangle en deux parties parfaitement symétriques ADB, ADC, c'est-à-dire, composées du même nombre de molécules situées de la même manière par rapport à AD. Considérons donc deux de ces molécules m et m' à des distances égales Mm, Mm' de AD : la résultante des deux forces parallèles, égales, représentatives des poids de m et m', lesquelles sont appliquées aux points m et m', aura son point d'application en M, intersection de mm' avec AD. et comme on pourra dire la même chose à l'égard de deux molécules quelconques, prises comme les précédentes par rapport à AD, on en conclura que AD est le lieu des centres de gravité de tous les points matériels et pesans dont se compose la surface ABC. Si donc

Fig. 38.

on regarde tous ces centres comme des points sollicités par des forces parallèles et représentatives de leurs poids, on conclura que le point d'application de la résultante, qui est le lieu du centre de gravité de l'aire, doit se trouver sur la ligne AD; mais on prouvera de la même manière qu'il doit se trouver sur BE qui joint le sommet B avec le milieu E du côté AC: donc ce centre sera en G intersection de AD et BE; mais si l'on tire DE, cette droite sera parallèle à AB, et de plus, elle en sera la moitié à cause des triangles DEG, BGA; donc

$$DG = \tfrac{1}{2} AG = \tfrac{1}{3} AD \text{ et } AG = \tfrac{2}{3} AD.$$

Corollaire Ier. Le centre de gravité de l'aire d'un triangle, est l'intersection des trois droites menées des trois sommets du triangle aux milieux des côtés opposés.

THÉORÈME XV. *Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire, est sur la droite qui joint le sommet avec le centre de gravité de la base, et au quart de cette droite à partir de la base.*

Le centre de gravité de la base BDC, est sur la droite
Fig. 39. BE menée au milieu E du côté DC, et en un point g tel que $Eg = \frac{1}{3} EB$. Or si par le sommet A et la ligne BE on mène un plan qui coupera la face ADC suivant AE, ce plan ABE divisera la pyramide en deux parties parfaitement symétriques, comme on peut s'en assurer en imaginant par tous les points de la hauteur, des plans parallèles à la base, plans qui détermineront autant de sections triangulaires semblables à cette base, et divisées comme elle en deux parties symétriques par le plan ABE; mais la ligne Ag passera par tous les centres de gravité g' de ces sections, puisque Bg étant

les deux tiers de BE, pareillement bg' sera les deux tiers de la droite be, menée de b au point e, intersection de dc avec AE, et conséquemment milieu de dc. Donc Ag contiendra le centre de gravité de la pyramide. De même si on prend $Eg'' = \frac{1}{3} EA$ et qu'on mène Bg'', le centre de gravité cherché sera encore sur cette ligne : il se trouvera donc à l'intersection G de Bg et Bg''. Si l'on joint g'' et g, la droite $g''g$ sera parallèle à AB, et située dans le plan ABE qui contient les lignes Bg'' et Ag : de plus on aura $gg'' = \frac{1}{3} AB$; or les triangles gGg'', BGA semblables, donnent.................. $Gg = \frac{1}{3} AG = \frac{1}{4} Ag$; donc $AG = \frac{3}{4} Ag$. Donc, etc.

THÉORÈME XVI. *Le centre de gravité d'une pyramide quelconque, est sur la droite qui joint le sommet avec le centre de gravité de sa base, et au quart de cette droite, à partir de la base.*

Soit la pyramide $SABCDE$: après avoir divisé la base Fig. 40. en triangles par des diagonales, on déduira des positions connues des centres de gravité g, g', g'', de ces triangles, celle du centre de gravité G' de la base : or si l'on mène les droites Sg, Sg', Sg'' et qu'on prenne $Sk = \frac{3}{4} Sg$, $Sk' = \frac{3}{4} Sg'$, $Sk'' = \frac{3}{4} Sg''$, les points k, k', k'' ainsi déterminés seront les centres de gravité des pyramides triangulaires $SABC$, $SACD$, $SADE$, et de plus le plan de ces points k, k', k'' sera parallèle à la base $ABCDE$, puisqu'on a

$$Sk : Sk' : Sk'' :: Sg : Sg' : Sg'';$$

mais le centre de gravité G des centres de gravité k, k', k'' est dans le plan $kk'k''$, et comme il est aussi sur la droite SG' qui perce toutes les sections parallèles dans le centre de gravité de chacune d'elles, il se trouve

nécessairement à la rencontre du plan $kk'k''$ par la droite SG'. Donc, etc.

On peut donc trouver, soit par le principe de la composition des forces parallèles, soit par celui des momens, le centre de gravité d'un corps terminé par des surfaces planes, puisqu'un tel corps est toujours décomposable en pyramides.

Les théorêmes suivans, consignés dans le N°. VII de la Correspondance sur l'École impériale Polytechnique, sont dus à *M. Berthot, ancien élève de cette École, et professeur de Mathématiques au Lycée de Dijon.*

THÉORÈME XVII. *Le centre d'un cercle, est le centre de gravité de la circonférence de ce cercle.*

Fig. 41. Si l'on suppose la figure pliée suivant le diamètre AB, les deux moitiés de la circonférence se confondront; et leurs centres de gravité seront en un même point K; d'où il suit, qu'après avoit ramené une moitié de la circonférence dans le plan de l'autre, les centres de gravité des deux demi-cercles seront les points E et K également éloignés de AB, et situés sur la perpendiculaire EK à AB : mais, par la même raison, il est sur tout autre diamètre ; donc il est le centre du cercle.

Le centre de gravité de la surface d'un cercle, se détermine de la même manière que celui de sa circonférence; et il est le même.

THÉORÈME XVIII. *Le centre de gravité de la surface d'un parallélogramme* ABCD, *est au milieu de la droite* EF *qui joint les milieux des côtés opposés.*

Pour le prouver, concevons la figure coupée suivant EF; et la portion $AEFD$ retournée et placée comme en

$XNQV$ à côté de $NBCQ$ qui représente $EBCF$: il est certain qu'en pliant la figure $XNOPQV$ suivant NQ, les deux parties $XNQV$, $NBCQ$ coïncideront, et par conséquent leurs centres de gravité coïncideront ; d'où il suit que si on rétablit la figure dans son premier état, ou si on la développe sur un plan, les centres de gravité des deux parties $XNQV$, $NBCQ$ seront en deux points R et S à des distances égales de NQ et sur une perpendiculaire à NQ : ainsi, en rétablissant le parallélogramme $ABCD$, ou en passant de la figure $XNBCQV$ à $ABCD$, les deux portions $AEFD$, $EBCF$ auront leurs centres de gravité en M et G, dont les positions sont telles que les perpendiculaires ML et GH sur EF sont égales et chacune égale à TR, et que $EL = HF = TQ$: donc, en menant MG, le centre de gravité du parallélogramme, sera au milieu de cette droite, en observant que les forces P', P'' représentatives des poids des surfaces AF, BF, appliquées en M et G, sont parallèles et égales : donc ce centre sera en K, à cause de l'égalité des triangles LMK, KGH ; mais il résulte de cette même égalité que le point K est le milieu de la base EF. Donc, etc.

THÉORÈME XIX. *Le centre de gravité de la surface d'un triangle* ABC, *est au tiers de la ligne* BD *qui joint le sommet* B *avec le milieu de la base* AC, *à compter de cette base.*

En effet, soit D le milieu de la base AC, et menons par ce point la droite DF parallèle à AB, et la droite ED parallèle à BC : le triangle sera décomposé dans les deux triangles AED, DFC parfaitement égaux, et dont chacun est le quart du triangle total ABC, et dans le parallélogramme $DEBF$ qui est la moitié de ABC. Cela posé, il est facile de prouver que le centre de gravité du triangle Fig. 45.

ABC ne peut être éloigné de sa base d'une quantité plus grande que le tiers de sa hauteur, par exemple, d'une quantité $\frac{h}{3}+m$, h étant la hauteur du triangle, et m une quantité quelconque ; car, en supposant que x représente la distance du centre de gravité du triangle *AED* à la base *AD*, celle du centre de gravité du triangle *DFC* à la même base sera aussi x ; d'ailleurs $\frac{h}{2}$ est la distance à *AC* du centre de gravité du parallélogramme *BEDF* : donc, en prenant *AC* pour axe des momens, et supposant que $\frac{h}{3}+m$ soit la distance à *AC* du centre de gravité du triangle *ABC*, on aura (2ᵉ. form. (*N*), p. 57)

$$ABC\left(\frac{h}{3}+m\right)=AED\times x+DFC\times x+EBFD\times\frac{h}{2}$$
$$=\tfrac{1}{4}ABC\times x+\tfrac{1}{4}ABC\times\frac{h}{2}$$

équation de laquelle on tire

$$x=\frac{h}{6}+2m:$$

mais $\frac{h}{6}$ est le tiers de la hauteur du triangle *AED* : donc, si la distance du centre de gravité d'un triangle *ABC* à sa base, pouvait être égale au tiers de sa hauteur plus m, en passant de ce triangle à un autre dont la base et la hauteur seraient les moitiés de celle-là, la distance du centre de gravité à la base serait le tiers de la hauteur plus $2m$. En raisonnant de la même manière sur ce nouveau triangle, et ainsi de suite, on parviendrait à un triangle dont la distance du centre de gravité à la base, serait plus grande que la hauteur, en sorte que ce centre serait hors de la

surface, ce qui est absurde. On démontrerait exactement de la même manière, que le même centre ne peut être éloigné de la base d'une quantité plus petite que le tiers de la hauteur. Donc il est éloigné de la base d'une quantité égale au tiers de la hauteur.

Cela posé, si l'on prend $AH = \frac{AB}{3}$ et que l'on mène Fig. 44. HF parallèle à AC, le centre de gravité sera sur HF; de même, si l'on prend $BG = \frac{BA}{3}$, et qu'on mène GE parallèle à BC, le même centre de gravité sera sur GE: donc ce centre sera en K. Mais à cause de $BG = \frac{BH}{2}$, on a $HK = \frac{1}{4}\ HF$, et conséquemment la droite BK prolongée, passe par le milieu de D, de AC; comme.... $HA = \frac{1}{3}\ AB$, pareillement $DK = \frac{1}{3}\ DB$. Donc, etc.

Sachant trouver le centre de gravité de la surface d'un triangle, il est aisé d'obtenir celui de la surface d'un polygone quelconque.

THÉORÊME XX. *Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire quelconque, est sur la droite qui joint son sommet au centre de gravité de la base, et au quart de cette droite, à partir de la base.*

Je dis d'abord que le centre de gravité d'une pyramide triangulaire quelconque $ABCD$, ne peut être éloigné de la base BCD d'une quantité plus grande que le quart de sa hauteur, par exemple, de la quantité $\frac{h}{4} + m$, h étant la hauteur de la pyramide, et m une quantité quelconque. En effet, en imaginant, par le milieu E de l'arête AB, un plan parallèle à la base BCD, ce Fig. 45.

plan détermine la section *EGF* : menant par le point *G* un plan parallèle à la face *ABD*, ce plan donne la section *GKH* : imaginant alors par les droites *FG* et *GK* un troisième plan qui détermine la section *FGKM*; et tirant les droites *EM*, *EK*, *FH*, *MH*, on décompose, par cette construction, la pyramide proposée en cinq parties, dont quatre sont les pyramides triangulaires parfaitement égales ou superposables *AEGF*, *EBKM*, *GKCH*, *FMHD* : la cinquième partie est l'octaèdre *GFEKHM*, ayant pour bases opposées *KMH*, *EGF*, et pour faces latérales les triangles *KME*, *EMF*, *FMH*, *FHG*, *GHK*, *GKE*. La base de chacune des pyramides partielles n'étant que le quart de la base de la pyramide totale, et la hauteur de ces mêmes pyramides n'étant que la moitié de celle de la pyramide entière, chacune des quatre pyramides, partielles est le huitième de la pyramide totale que nous désignerons par *P*; ces quatre pyramides vaudront donc $\frac{1}{2}P$, qui sera conséquemment le volume de l'octaèdre. Mais l'octaèdre étant évidemment composé des deux pyramides quadrangulaires *HKGFM*, *EKGFM* qui, placées convenablement, sont symétriques par rapport au plan *KGFM*, le centre de gravité de cet octaèdre est dans le parallélogramme *KGFM*. De même l'octaèdre étant aussi composé des deux pyramides quadrangulaires *FEGHM*, *KEGHM* dont les sommets sont *F* et *K*, et qui sont symétriques par rapport au plan *EGHM*, le centre de gravité de ce corps sera aussi dans le parallélogramme *EGHM* : enfin il est aussi dans le parallélogramme *EFHK*, parce que l'octaèdre peut être regardé comme composé des deux pyramides quadrangulaires *GEFHK*, *MEFHK* symétriques par rapport au plan *EFHK*. Dès lors, le centre de gravité de l'octaèdre est le point commun aux trois

parallélogrammes $KGFM$, $EFHK$, $EGHM$, et par conséquent, il est éloigné de la base BDC d'une quantité égale à la moitié de la distance entre les bases EGF et BDC, laquelle est $\frac{h}{4}$. Mais les quatre pyramides partielles étant superposables, la distance du centre de gravité de chacune d'elles à sa base, doit être la même : ainsi en nommant x cette distance, et supposant que $\frac{h}{4}+m$ soit la distance du centre de gravité de la pyramide totale au plan BDC, on aura, en prenant BDC pour le plan des momens (3[e]. form. (N), pag. 57)

$$P\left(\frac{h}{4}+m\right)=AEGF\left(x+\frac{h}{2}\right)+3\,EBKM\times x\,,\\ +GEFHKM\times\frac{h}{4},$$

c'est-à-dire,

$$P\left(\frac{h}{4}+m\right)=\frac{P}{8}\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{3\,Px}{8}+\frac{Ph}{8},$$

divisant par P et dégageant x, on trouve

$$x=\frac{h}{8}+2\,m\,;$$

mais $\frac{h}{8}$ est le quart de la hauteur d'une des pyramides partielles ; donc s'il arrivait que le centre de gravité d'une pyramide triangulaire quelconque, fût éloigné de sa base d'une quantité égale au quart de sa hauteur plus m, la distance à la base du centre de gravité d'une pyramide triangulaire dont la base serait quatre fois plus petite, et la hauteur deux fois plus petite, serait égale au quart de sa hauteur plus $2\,m$. Ainsi, on parviendrait bientôt à une pyramide dont le centre de gravité serait éloigné de la base d'une quantité plus

grande que la hauteur, ou dont le centre de gravité serait hors de la pyramide, ce qui est absurde. On prouverait absolument de la même manière que la distance du centre de gravité de la même pyramide, à sa base, ne peut être moindre que le quart de sa hauteur. Donc, etc.

D'après cela, il est facile de prouver la proposition énoncée.

Fig. 46. En effet, si l'on prend $BM = \frac{BA}{4}$, et que l'on mène par le point M un plan parallèle à BCD, ce plan déterminera la section MON qui, d'après la proposition précédente, doit contenir le centre de gravité de la pyramide. Mais si l'on prend $AE = \frac{AB}{4}$, et que l'on mène par le point E un plan parallèle à la face ACD, ce plan déterminera la nouvelle section EGF sur laquelle devra encore se trouver le centre de gravité de la pyramide : dès lors, ce centre se trouvera sur la droite KH intersection des deux plans. Mais comme dans le triangle AMO, on a $AE = \frac{AM}{3}$, pareillement $KO = \frac{MO}{3}$: par conséquent KH devant être parallèle à ON, cette droite est éloignée de ON d'une quantité égale au tiers de la distance de ON au point M. Le centre de gravité en question doit aussi se trouver sur un plan parallèle à la face ABD, et éloigné de cette face d'une quantité égale au quart de la distance du sommet C à cette même face : on peut donc conclure que ce centre de gravité est situé sur une autre droite tracée sur la section MON parallèlement à MN et éloignée de MN d'une quantité égale au tiers de la distance de cette droite à l'angle O. Le centre de gravité cherché est donc

au point de rencontre de cette droite avec KH, point qui, d'après ce qu'on a vu (Théor. XIV ou XIX), ne peut être que le centre de gravité du triangle MON. Si on joint ce point au point A, la droite prolongée passera évidemment par le centre de gravité du triangle BCD, ce dont on peut facilement se convaincre par la similitude des triangles; et comme il est clair que le centre de gravité de la pyramide, est au quart de cette droite, à partir de la base, la proposition est donc démontrée.

THÉORÈME XXI. *Le centre de gravité d'un prisme triangulaire quelconque est au milieu de la droite qui joint le centre de gravité de ses bases.*

Pour le démontrer, soit le prisme triangulaire..... Fig. 47. $ABCDEF$: je mène la droite IH qui joint les centres de gravité de ses bases, et je regarde le milieu L de cette droite comme le sommet de cinq pyramides qui auraient pour base les cinq faces du prisme. Les deux pyramides qui ont pour bases ACB, DEF, sont chacune le sixième du volume du prisme puisqu'elles ont chacune même base que lui, et une hauteur deux fois moindre; elles valent donc ensemble le tiers de ce prisme; et de plus le centre de gravité de leur système, est au point L lui-même, parce que le centre de gravité de la première, est aux trois quarts de LI, à partir du point L, et que le centre de gravité de la seconde est aux trois quarts de LH, à partir du même point. Chacune des pyramides qui a pour base une des faces latérales du prisme, vaut $\frac{2}{9}$ de ce solide : car, par exemple, celle qui a pour base $CBEF$, peut être regardée comme composée de deux pyramides qui auraient leurs sommets en L, et pour bases les triangles CBF, FBE; celle qui a pour base FBE, équivaut à une autre pyramide qui

aurait son sommet en H, et pour base le même triangle; pyramide qui peut être considérée comme ayant son sommet en B, et pour base le triangle HFE qui est le tiers de DEF. Cette pyramide ayant pour hauteur celle du prisme, et une base qui n'est que le tiers de celle du même prisme, vaut $\frac{1}{3}$ de ce prisme : celle qui a son sommet en L, et pour base CBF, équivaut à une autre pyramide qui aurait même base et son sommet en I, pyramide qui peut être considérée comme ayant son sommet en F, et pour base ICB qui est le tiers de la base du prisme : cette pyramide vaut donc aussi $\frac{1}{3}$ du prisme. On prouverait de même que les deux autres pyramides qui ont pour bases $ACFD$, $ABED$ valent chacune $\frac{2}{3}$ du prisme. Cela posé, en imaginant par le point L un plan parallèle aux bases ACB, DFE, ce plan passera par le centre de gravité de chacune des trois pyramides quadrangulaires, puisqu'il est mené par leur sommet commun, et par le centre de gravité de la base de

Fig. 48. chacune d'elles (Théor. XVI et XX) : si donc on suppose que MNO soit la section déterminée par ce plan, en menant des droites qui lient les sommets des angles aux milieux des côtés opposés, ces droites se couperont en un point Z qui sera le centre de gravité de cette section triangulaire MNO, et ce point Z représentera le point L, comme il est aisé de le voir dans la fig. 47. Les points Q, R, P milieux des côtés, seront les centres de gravité des bases des pyramides quadrangulaires (Théor. XVIII), et les droites ZP, ZQ, ZR menées de ces centres de gravité, au sommet commun de ces trois pyramides quadrangulaires, renferment les centres de gravité de celles-ci. On voit même qu'en prenant $QV = \frac{QZ}{4}$, $RS = \frac{RZ}{4}$, $PT = \frac{PZ}{4}$, les points V, S et T seront les centres de gravité de ces pyramides

quadrangulaires. D'après cela, si on mène RP, ST, ces droites seront parallèles, et comme $XR = XP$, on aura $SY = YT$, et par conséquent le point Y est le centre de gravité des deux pyramides quadrangulaires dont les centres de gravité particuliers sont en S et T. Il existe donc en Y une force double de celle qui est appliquée en V, ces deux forces étant d'ailleurs parallèles. Ainsi, le centre de ces forces, c'est-à-dire, le centre de gravité du système des trois pyramides quadrangulaires, sera en Z, ou bien en L, si l'on prouve que $YZ = \frac{ZV}{2}$, et ce point sera en même tems le centre de gravité du prisme. Or

$YZ = MQ - MX - XY - QZ$ et $ZV = ZQ - VQ$;

et comme

$$MX = \frac{MQ}{2},\ ZQ = \frac{MQ}{3},$$

on a

$$XZ = MQ - QZ - MX = MQ - \frac{MQ}{3} - \frac{MQ}{2} = \frac{MQ}{6};$$

mais à cause de $RS = \frac{RZ}{4}$, on a

$$XY = \frac{XZ}{4} = \frac{MQ}{24},$$

donc

$$YZ = MQ - \frac{MQ}{2} - \frac{MQ}{24} - \frac{MQ}{3} = \frac{MQ}{8},$$

d'ailleurs

$$QV = \frac{QZ}{4} = \frac{MQ}{12},$$

donc

$$ZV = \frac{MQ}{3} - \frac{MQ}{12} = \frac{MQ}{4},$$

ce qui prouve que $YZ = \frac{ZV}{2}$ et qu'ainsi le point Z ou L est le centre de gravité du prisme.

Corollaire Ier. Le centre de gravité d'un prisme quelconque, est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité de ses bases opposées parallèles.

Corollaire II. Le centre de gravité d'un cylindre, à bases parallèles et circulaires, est au milieu de la droite qui joint les centres de ces bases.

Théorème XXII. *Le centre de gravité d'une sphère, est le centre même de la sphère.*

En imaginant un plan par le centre de la sphère, ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle, et divise le corps en deux hémisphères superposables : si donc on les superpose, leurs centres de gravité seront évidemment au même point, et par conséquent en ramenant les deux hémisphères dans leur position primitive, ces centres de gravité se trouveront à des distances égales du plan sécant et des deux côtés de ce plan, et alors le centre de gravité du système sera dans ce plan : et comme on prouverait de même que ce centre de gravité est dans deux autres plans quelconques, passant par le centre, il ne peut être que ce centre lui-même.

Il importe de faire connaître l'emploi des formules (M) (page 57) dans la détermination des centres de gravité.

1°. *Déterminer le centre de gravité du contour d'un polygone quelconque.*

Les droites AB, BC.... étant uniformément grosses et denses, leurs centres de gravité seront en leurs milieux
Fig. 49. m', m'', m'''.... qu'on pourra regarder comme des points liés invariablement entre eux et sollicités par des forces P', P''.... représentatives des poids des côtés : ces points m', m''.... étant rapportés aux axes rectangulaires MX,

MY par les coordonnées x', y' ; x'', y''.... on aura à chercher la grandeur et le point d'application de la résultante des forces parallèles P', P''.... qui sollicitent des points m', m''.... situés dans un même plan, et alors il ne faudra employer que les trois premières des équations (M), (pag. *id.*, *coroll.* Ier.), savoir :

$$R = P' + P'' + \text{etc.}$$
$$X = \frac{P'x' + P''x'' + \text{etc.}}{R}$$
$$Y = \frac{P'y' + P''y'' + \text{etc.}}{R}.$$

Mais si l'on remplace dans les deux dernières formules P', P''.... par les valeurs $V'Dg$, $V''Dg$.... (pag. 69), et qu'on observe que la densité et la gravité sont constantes, et qu'aussi on peut supprimer Dg dans les deux termes de chacune des fractions, et remplacer ensuite V', V''.... par $AB = l'$, $BC = l''$.... on aura

$$X = \frac{l'x' + l''x'' + \text{etc.}}{l' + l'' + \text{etc.}}$$
$$Y = \frac{l'y' + l''y'' + \text{etc.}}{l' + l'' + \text{etc.}};$$

or, si après avoir représenté $l' + l'' + l'''$..... par m, on construit les troisièmes proportionnelles $\frac{l'x'}{m} = i$, $\frac{l''x''}{m} = i'$......, $\frac{l'y'}{m} = k$, $\frac{l''y''}{m} = k'$......, on trouvera ces expressions linéaires des coordonnées du centre de gravité du contour,

$$X = \frac{m\,(i + i' + \text{etc.})}{m} = i + i' + \text{etc.}$$
$$Y = \frac{m\,(k + k' + \text{etc.})}{m} = k + k' + \text{etc.},$$

ces longueurs X et Y portées sur les axes MX, MY, feront connaître la position du centre de gravité du polygone.

2°. *Déterminer le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque.*

Après avoir décomposé l'aire en triangles, et supposé les masses homogènes de ces triangles, concentrées en leurs centres de gravité g', g''...., on n'aura plus qu'à chercher le point d'application de la résultante R des forces parallèles et représentatives des poids de ces triangles, appliquées aux points g', g''.... liés invariablement entre eux, et rapportés par les coordonnées x', y' ; x'', y''..... aux axes MX et MY. Comme alors les forces P', P''..... sont proportionnelles aux aires s', s''..... des triangles (pages 87 ou 69 et 70), les seconde et troisième formules (M) deviendront

$$X = \frac{s'x' + s''x'' + \text{etc.}}{s' + s'' + \text{etc.}}$$

$$Y = \frac{s'y' + s''y'' + \text{etc.}}{s' + s'' + \text{etc.}};$$

or, si l'on désigne par s la somme des surfaces $s' + s''$, et qu'on change tous les volumes $s'x'$, $s''x''$...... $s'y'$, $s''y''$..... en d'autres qui aient s pour base, et dont les hauteurs connues soient h, h', h''.... H, H', H''...., on aura ces expressions linéaires des coordonnées X, Y du centre de gravité, savoir :

$$X = h + h' + h'' + \text{etc.}$$
$$Y = H + H' + H'' + ,$$

on portera encore ces longueurs à partir de l'origine M sur les axes des x et y, ce qui fera connaître le centre de gravité de l'aire.

3°. *Trouver le centre de gravité d'un polyèdre quelconque.*

On imaginera ce polyèdre décomposé en pyramides triangulaires dont les centres de gravité g', g''.... seront sollicités par des forces parallèles représentatives de leurs poids respectifs, et il s'agira de trouver le point d'application de leur résultante, ce qu'on fera au moyen des trois dernières formules (M) en y remplaçant les forces P', P''.... par les volumes des pyramides triangulaires, qui sont proportionnelles à ces forces, en supposant le polyèdre homogène, ou uniformément dense dans toute son étendue. Si donc on désigne par v', v'', v'''... les volumes de ces pyramides, on aura

$$X = \frac{v'x' + v''x'' + \text{etc.}}{v' + v'' + \text{etc.}}$$

$$Y = \frac{v'y' + v''y'' + \text{etc.}}{v' + v'' + \text{etc.}}$$

$$Z = \frac{v'z' + v''z'' + \text{etc.}}{v' + v'' + \text{etc.}}$$

mais la somme des volumes $v' + v'' + \text{etc.}$ est un autre volume que nous représenterons par V; et en supposant $V = a^2H$, on pourra supposer $v' = a^2h'$, $v'' = a^2h''$.... ; en sorte que

$$X = \frac{a^2(h'x' + h''x'' + \text{etc.})}{a^2H} = \frac{h'x' + h''x'' + \text{etc.}}{H}$$

$$Y = \frac{a^2(h'y' + h''y'' + \text{etc.})}{a^2H} = \frac{h'y' + h''y'' + \text{etc.}}{H}$$

$$Z = \frac{a^2(h'z' + h''z'' + \text{etc.})}{a^2H} = \frac{h'z' + h''z'' + \text{etc.}}{H}.$$



Soient maintenant les quatrièmes proportionnelles.....
$\frac{h'x'}{H}=l'$, $\frac{h''x''}{H}=l''$ $\frac{h'y'}{H}=k'$, $\frac{h''y''}{H}=k''...$,
$\frac{h'z'}{H}=i'$, $\frac{h''i''}{H}=i''...$, et les formules précédentes deviendront

$$X=l'+l''+\text{etc.}$$
$$Y=k'+k''+\text{etc.}$$
$$Z=i'+i''+\text{etc.}$$

coordonnées linéaires qu'on portera, à partir de l'origine, suivant les trois axes MX, MY, MZ.

Remarque I. Ces solutions analytiques supposent la détermination, par l'une des méthodes géométriques précédemment exposées, des centres de gravité de l'aire d'un triangle et de la masse d'une pyramide triangulaire.

Remarque II. Le centre de gravité de l'aire d'un triangle, est le même que celui de trois points massifs égaux, situés aux trois sommets du triangle : car le centre de gravité des deux points massifs B et C, est au milieu
Fig. 50. I de BC. Si donc, on suppose ces deux masses réunies en I et qu'on joigne AI, on aura en I et A deux masses dont la première est double de la seconde ; leur centre de gravité sera en G, c'est-à-dire, aux deux tiers de AI, à partir de A. Or, P', P'', P''' étant les poids de ces trois masses, on aura $P'=P''=P'''$, et les formules (M) donneront

$$x=\frac{x'+x''+x'''}{3},\ y=\frac{y'+y''+y'''}{3},$$

Donc, chacune des coordonnées rectangulaires du centre de gravité d'un triangle, est le tiers de la somme des coordonnées de ses trois sommets.

On reconnaîtra aussi que lè centre de gravité d'une pyramide triangulaire, est le même que celui de quatre points massifs égaux, situés aux sommets des quatre angles de cette pyramide, et on conclura des formules (*M*) *que la distance du centre de gravité d'une pyramide triangulaire à un plan, est le quart de la somme des distances des sommets de ces angles à ce plan.*

THÉOREME XXIII. *Le centre de gravité d'un arc de cercle, est sur le rayon qui passe par le milieu de cet arc, à une distance du centre, quatrième proportionnelle à la longueur de l'arc, à sa corde et au rayon.*

Soit l'arc de cercle AFB : le rayon CF mené au milieu de l'arc, divise cet arc en deux parties symétriques, et passe par leur centre de gravité. Concevons cet arc partagé en une infinité d'élémens, tels que MN; menons le diamètre LQ parallèle à la corde AB; abaissons du milieu O de chacun de ces élémens une perpendiculaire OP sur le diamètre; $MN \times OP$ est le moment de l'élément MN par rapport au diamètre LQ: or, en menant MI parallèle à la corde AB, et le rayon CO, les triangles semblables MNI et OPC donnent Fig. 51.

$$MN : MI :: CO : OP;$$

donc $MN \times OP = CO \times IIK$; d'où l'on voit que le moment de chaque élément par rapport au diamètre LQ, est égal au rayon multiplié par la projection de cet élément sur la corde AB : la somme des momens des élémens, a donc pour expression le produit du rayon par la corde; mais cette somme de momens, est égale au moment de l'arc entier; donc, si CG est la distance du centre de gravité de l'arc au diamètre LQ, on a

$$CO \times AB = AFB \times CG,$$

c'est-à-dire

$$AFB : AB :: CO : CG,$$

donc, etc,

THÉORÈME XXIV. *Le centre de gravité de l'aire d'un secteur circulaire, est sur le rayon mené au milieu de l'arc du secteur, à une distance du centre, quatrième proportionnelle à l'arc, à sa corde et aux deux tiers du rayon.*

Fig. 52. Car, en considérant le secteur comme composé d'une infinité de triangles égaux qui ont leurs sommets au centre, chacun de ces triangles a son centre de gravité aux deux tiers du rayon mené au milieu de sa base, en sorte que l'aire du secteur, peut être considérée comme distribuée uniformément sur l'arc DIE décrit avec un rayon $CI = \frac{2}{3}\ CF$. Le centre de gravité G du secteur, étant le même que celui du dernier arc, on aura par, ce qui précède,

$$CG = \frac{CI.DE}{DIE} = \frac{\frac{2}{3}.CF.AB}{AFB}.$$

d'où l'on déduit cette proportion

$$AFB : AB :: \tfrac{2}{3}CF : CG$$

qui rend l'énoncé.

THÉORÈME XXV. *Le centre de gravité de l'aire d'un segment de cercle, est sur le rayon mené au milieu de l'arc, et à une distance du centre du cercle, égale au douzième du cube de la corde, divisé par l'aire du segment.*

Fig. 53. Soit le segment $AFBM$. Supposons que les centres de gravité particuliers du segment, du triangle et du secteur sont respectivement en G, I et K : en prenant les momens par rapport au centre, on a

$$AFBM \times CG = AFBC \times CK - ABC \times CI,$$

en observant que le moment du secteur, est égal à la somme des momens du segment et du triangle : or

$$AFBC = AFB \times \frac{1}{2}\, CF,\ CK = \frac{\frac{2}{3}\, CF . AB}{AFB},$$

$$ABC = AB . \frac{1}{2}\, CM,\ CI = \frac{2}{3}\, CM.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation des momens, elle deviendra

$$AFBM \times CG = \frac{AB\,(\overline{CF}^2 - \overline{CM}^2)}{3} = \frac{\overline{AB}^3}{12},$$

d'où l'on tire

$$CG = \frac{\frac{1}{12}\,\overline{AB}^3}{AFBM}.$$

THÉORÈME XXVI. *Le centre de gravité de la surface d'une calotte sphérique, est au milieu de son axe ou de sa flèche.*

Concevons la surface de la calotte engendrée par la révolution de l'arc AF autour de l'axe FM perpendiculaire Fig. 53. sur le milieu de la corde AB : si l'on imagine cette surface partagée en une infinité de zones de même hauteur, par des plans parallèles à la base de cette calotte, ces zones seront équivalentes, et chargeront la flèche FM également et uniformément ; leur centre commun de gravité, ou celui de la calotte, sera donc au milieu de MF.

THÉORÈME XXVII. *Le centre de gravité d'un secteur sphérique, est sur son axe, à une distance du centre de la sphère, égale aux trois quarts du rayon, moins les trois huitièmes de la hauteur de la calotte.*

Supposons le secteur sphérique engendré par la révo- Fig. 54. lution du secteur circulaire $CMAN$ autour du rayon CA

qui passe par le milieu A de l'arc MAN, et concevons le secteur composé d'une infinité de pyramides équivalentes, dont les sommets soient au centre de la sphère; chacune de ces pyramides aura son centre de gravité aux trois quarts du rayon mené au centre de gravité de sa base, en sorte qu'on pourra considérer la masse du secteur comme distribuée uniformément sur une calotte concentrique à celle du secteur, et dont le rayon serait les trois quarts de celui de la sphère : le centre de gravité du secteur est donc, d'après le théorème précédent, au milieu m de l'axe FB de cette calotte concentrique. Donc, si r est le rayon de la sphère et x la hauteur AK de la calotte du secteur, la hauteur BF de la calotte concentrique, sera $\frac{3}{4}x$, parce qu'on a $BF : KA :: CB : CA :: \frac{3}{4} : 1$, et la distance FC de la base de cette même calotte, au centre de la sphère, étant $\frac{3}{4}(r-x)$, la distance mC du centre de gravité du secteur, au centre de la sphère, sera donc $\frac{3}{4}(r-x)+\frac{3}{8}x=\frac{3}{4}r-\frac{3}{8}x$. Donc etc.

THÉORÈME XXVIII. *Le centre de gravité du segment sphérique, en conservant les mêmes dénominations, est éloigné du sommet de la calotte, de la quantité.......* $\frac{8rx-3x^2}{12r-4x}$.

En effet, le moment du segment par rapport au sommet de la calotte, est égal à la différence des momens du secteur et du cône; or, le volume du secteur est $\frac{2}{3}\pi r^2 x$, celui du cône est $\pi(2rx-x^2)\times\frac{r-x}{3}$. (Fig. 54.)

La distance du centre de gravité du secteur au sommet de la calotte, est (*Théor.* XXVII), $\frac{1}{4}r+\frac{3}{8}x$. Il faut trouver la distance au même point du centre de gravité du cône. Or, le centre de gravité d'un cône est comme

celui d'une pyramide régulière à base polygonale, aux trois quarts de la droite menée du sommet au centre de gravité de la base, qui est le centre du cercle base du cône : il est donc aux trois quarts de CK à partir de C : or, $CK = CA - AK = r - x$: donc, la distance de ce centre au point C, est $\frac{3}{4}r - \frac{3}{4}x$, et conséquemment sa distance au point A est $= \frac{1}{4}r + \frac{3}{4}x$. La différence des momens du secteur et du cône, sera donc

$$\tfrac{2}{3}\pi r^2 x\,(\tfrac{1}{4}r + \tfrac{3}{8}x) - \pi\,(2rx - x^2)\left(\frac{r-x}{3}\right)(\tfrac{1}{4}r + \tfrac{3}{4}x),$$

divisant par le volume du segment, qui est $\pi x^2 (r - \frac{1}{3}x)$, et réduisant, on trouve l'expression annoncée.

Nous passerons enfin à l'usage des centres de gravité pour déterminer les surfaces et les volumes des solides de révolution.

THÉORÈME XXIX. *La surface engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe situé dans le plan de cette courbe, est égale au produit de la courbe génératrice par le chemin que parcourt son centre de gravité.*

Soit l'arc AXB qui tourne autour de l'axe YY, et G le centre de gravité de la courbe; concevons cet arc partagé en une infinité d'élémens, tels que mm', $m'm''$, etc. : du centre de gravité G, et du milieu de chacun de ces élémens, abaissons sur l'axe les perpendiculaires YY, is, $i's'$, etc. ; l'élément mm', en tournant autour de YY, engendre une surface exprimée par $mm'.2\pi.is$; l'élément $m'm''$ engendre pareillement une surface exprimée par $m'm''.2\pi.i's'$, et ainsi des autres élémens de la courbe ; en sorte que la surface entière de révolution, est égale à Fig. 55.

la somme de ces produits. Appelant donc S cette surface, on a

$$S = 2\pi\,(mm'.is + m'm''.i's' + \text{etc.})$$

Mais la quantité comprise entre les parenthèses, est égale à $AXB \times CG$; donc

$$S = AXB.2\pi.CG.$$

Or 2π, CG est la circonférence décrite par le centre de gravité. Donc, etc.

THÉORÊME XXX. *Le solide engendré par la révolution d'une figure plane autour d'un axe situé dans le plan de la figure, est égal au produit de l'aire génératrice par la circonférence décrite par son centre de gravité.*

Fig. 56. Concevons la surface partagée en une infinité d'élémens infiniment étroits, tels que $mm'n'n$, $m'm''n''n$, etc., de même hauteur h, par des perpendiculaires à l'axe; le solide engendré par la révolution de $mm'n'n$, est la différence des solides engendrés par $mm'k'k$ et $nn'k'k$, et il est exprimé par $\pi h\,(y^2 - y'^2)$, en désignant par y et y' les rayons mk, nk; pareillement le solide engendré par $m'm''n''n'$ est exprimé par $\pi h\,(z^2 - z'^2)$, z et z' étant les distances des points m' et n' à l'axe. Donc, si l'on nomme V le solide entier de révolution, on aura

$$V = \pi\,[h\,(y^2 - y'^2) + h\,(z^2 - z'^2) + \text{etc.}]$$
$$= 2\pi\left[h\left(\frac{y^2 - y'^2}{2}\right) + h\left(\frac{z^2 - z'^2}{2}\right) + \text{etc.}\right],$$

mais la totalité des quantités multipliées par 2π, est la somme des momens de tous les élémens de l'aire génératrice par rapport à l'axe; car

$$h\left(\frac{y^2-y'^2}{2}\right)=h(y-y')\left(\frac{y+y'}{2}\right)=h(y-y')\left(y'+\frac{y-y'}{2}\right)$$

et $h(y-y')$ est l'aire de l'élément $mm'n'n$, tandis que... $y'+\frac{y-y'}{2}$ est la distance à l'axe yy du centre de gravité de cet élément. On peut donc, à cette somme de momens, substituer le produit $DAOB$ par CG. Donc

$$V=2\pi\, AOBD \times CG = AOBD \times ar.CG.$$

Dans un ouvrage ayant pour titre : *Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique, appliquée à la recherche des lieux géométriques*, M. Simon Lhuilier a déduit le développement de quelques-unes des propositions locales, et en particulier, celui des plus importantes d'entre elles, des propriétés *du centre des moyennes distances*, qui n'est que *le centre de gravité* : en conséquence, ce géomètre a résumé ces propriétés dans une dissertation fort curieuse qui sert d'introduction à son ouvrage, et dont j'extrairai le passage suivant : « Considérant d'une part l'importance « de ces propriétés, même en les envisageant sous un « point de vue purement abstrait et géométrique, indé- « pendamment de toute application aux parties mixtes « des mathématiques, et de l'autre part la facilité avec « laquelle elles peuvent être démontrées, sans l'interven- « tion d'aucun principe étranger aux mathématiques pures, « je pense que leur exposition devroit entrer dans les « Traités élémentaires des mathématiques pures, et je « regrette qu'elle n'y ait pas été introduite jusqu'ici. »

CHAPITRE VI.

Des Mouvemens des centres de gravité.

THÉORÈME XXXI *Lorsque les centres de gravité particuliers de deux corps* A *et* C, *se meuvent uniformément et dans le même sens, suivant deux lignes droites, le centre de gravité de leur système décrit uniformément une ligne droite.*

LE mouvement le plus simple que puisse prendre un point matériel, est celui qui se fait en ligne droite, et dans lequel le mobile parcourt des espaces égaux en tems égaux. C'est ce mouvement qu'on appelle *uniforme*.

Lorsque les centres de gravité particuliers de deux corps
Fig. 57. A et C, doivent parcourir uniformément et dans le même tems, les deux droites AB, CD, il faut entendre par là qu'ils décriront, dans le même tems, des parties proportionnelles de ces droites.

Soient donc AB, CD les droites que les centres de gravité des deux corps A et C, doivent parcourir uniformément et dans le même tems, en partant des points A et C, ces droites étant ou non dans le même plan : si on divise AC et BD dans les deux points P et R, de manière qu'on ait

$$C : A :: AP : PC;\ C : A :: BR : RD,$$

le point P sera le centre de gravité des deux corps à l'origine du mouvement, et le point P sera parvenu en

R, lorsque les corps A et C seront arrivés en B et D. Il suffit donc de démontrer que le centre de gravité du systême, parcourt uniformément la droite PR.

Supposons que le centre de gravité du corps A ait déja parcouru la partie AE de la droite AB, telle qu'on ait

$$AE : EB :: AP : PC :: C : A,$$

et soient joints les points B et C, E et P : les lignes BC, EP seront parallèles, et les triangles ABC, AEP seront semblables. Mais le centre de gravité de C aura été transporté dans le même tems de C en H, et on aura

$$CD : CH :: AB : AE :: AC : AP :: BD : BR,$$

à cause de $AC : AP :: A + C : C :: BD : BR$: donc la droite RH sera aussi parallèle à BC, et les triangles BDC, RDH seront semblables.

Les deux droites EP, RH étant parallèles à BC, seront parallèles entre elles et situées dans un même plan. Ainsi, lors même que les deux droites AB, CD ne seraient pas dans un même plan, les droites PR et EH seront cependant dans un même plan, et conséquemment elles se couperont en un point Q que je dis être le lieu du centre de gravité du systême, lorsque ceux des corps A et C sont en E et H.

En effet, les triangles semblables AEP, ABC donnent

$$EP : BC :: AE : AB,$$

et les triangles semblables BDC, RDH donnent

$$BC : RH :: CD : HD :: AB : EB,$$

parce que de la proportion ci-dessus $CD : CH :: AB : AE$ on déduit $CD : CD - CH$ ou $HD :: AB : AB - AE$

ou EB. Multipliant par ordre les deux proportions précédentes, on trouve

$$EP : RH :: AE : EB :: C : A;$$

mais les triangles semblables EPQ, HRQ donnent

$$EQ : QH :: EP : RH.$$

On a donc aussi

$$EQ : QH :: C : A,$$

donc le centre de gravité du système est en Q, lorsque ceux des corps A et C sont en E et H.

On a aussi la propriété

$$PR : PQ :: AB : AE.$$

On peut maintenant considérer les portions AE, CH comme des lignes entières que les mobiles devaient parcourir uniformément, de sorte que si l'on prend des parties AG, CK de ces droites, telles qu'on ait

$$AG : GE :: AP : PC :: C : A$$

$$CK : KH :: AP : PC :: C : A,$$

on démontrera, de la même manière, que lorsque les centres particuliers de gravité, sont en G et K, le centre de gravité, du système est en T, intersection des droites PR et GK situées dans un même plan, et ainsi de suite. Donc, etc.

Remarque. Dans la figure 58, le corps A se meut Fig. 58. toujours de A en B, et le corps C de C en D, de manière que les droites AB, CD soient parcourues uniformément et dans le même tems.

Corollaire Ier. Donc, si les centres de gravité particu-

liers d'un nombre quelconque de corps A, B, C, D, etc., se meuvent uniformément suivant des lignes droites AE, BH, CL, DO, etc., situées ou non dans un même plan, le centre de gravité du système parcourra uniformément une droite MN. En effet, on peut maintenant regarder les deux corps A et B comme un seul corps $A+B$ dont le centre de gravité F décrit uniformément la droite FG : ainsi, pendant que F et le centre de gravité du corps C se mouvront uniformément suivant FG et CL, le centre de gravité I de leur système, décrira uniformément la droite IK. Et de même les centres de gravité du corps $A+B+C$ et du corps D, se mouvant uniformément, suivant les droites IK et DO qu'ils parcourent dans le même tems, le centre de gravité M du système, parcourra uniformément et dans le même tems la droite MN, et ainsi de suite. Fig. 59 et 60.

Corollaire II. Si les deux droites AB, CD sont dans un même plan, la droite PR sera dans ce plan; si ces droites sont parallèles, la droite PR leur sera parallèle. Fig. 57 et 58. Si les centres de gravité des corps A, B, C, D, décrivent des droites parallèles situées ou non dans le même plan, la droite MN leur sera parallèle. Fig. 59 et 60.

Corollaire III. Si les centres de gravité A et E de deux mobiles décrivent uniformément et en même tems, les côtés homologues et parallèles chacun à chacun de deux polygones semblables $ABCD$, $EFGH$, et qu'on tire par les angles correspondans de ces polygones, des droites indéfinies, qui iront nécessairement concourir en un même point X, on déduira du corollaire précédent que le centre de gravité N du système, décrira uniformément le contour d'un troisième polygone $NOPQ$ semblable à chacun des deux précédens, et dont les côtés extrêmes aboutiront aux droites Fig. 61 et 62.

qui joindront les positions initiales et finales des deux mobiles. On étendra cette conclusion à un nombre quelconque de mobiles décrivant uniformément les côtés ou élémens successifs et correspondans de plusieurs polygones courbes semblables, et il est bon de remarquer que cette conséquence aura encore lieu, lors même que les côtés et les élémens des polygones et des courbes seront dans des plans différens, c'est-à-dire, lorsque les polygones seront gauches et les courbes à double courbure.

THÉORÈME XXXII. *Si deux corps* A *et* C *se meuvent uniformément et en sens contraires, suivant deux droites parallèles* AB, CD, *dont les longueurs soient réciproquement proportionnelles aux poids de ces corps, le centre de gravité du système sera immobile.*

Supposons les deux droites AB, CD parallèles : si l'on
Fig. 63. joint A et C et B et D qui sont les positions initiales et finales des centres de gravité, ces droites AC et BD se couperont en P, et on aura

$$PA : PC :: AB : CD, \quad PB : PD :: AB : CD;$$

mais les droites AB, CD étant réciproquement proportionnelles aux poids des corps A et C, on aura

$$AB : CD : C : A,$$

donc

$$PA : PC :: C : A, \quad PB : PD :: C : A,$$

ainsi P sera le lieu du centre de gravité du système, dans la première et la dernière position des mobiles.

Si l'on tire par le même point P des droites EH, FK, etc., comme les parties AE, EF, FB, etc., sont proportionnelles aux parties CH, HK, KD, etc.,

nécessairement les premières seront parcourues uniformément dans les mêmes tems que les secondes; ainsi les corps A et B se trouveront en même tems aux points E et H, F et K, B et D. Or

$$PE : PH :: PA : PC, \quad PF : PK :: PA : PC,$$

et d'ailleurs, d'après ce qu'on a démontré précédemment

$$PA : PC :: C : A,$$

donc

$$PE : PH :: C : A$$

$$PF : PK :: C : A,$$

et par conséquent le point P est encore le lieu du centre de gravité du système des deux corps dans les positions E et H, F et K, et dans toutes les positions analogues. Donc, etc.

Corollaire Ier. Si deux corps M et N décrivant uni- Fig 64.
formément et dans le même tems, deux droites MO, NQ, auquel cas le centre de gravité A du système parcourt de la même manière AB, et si pendant le même tems le centre de gravité d'un troisième corps C, décrit uniformément et en sens contraire la droite CD parallèle à AB, et que les lignes AB et CD soient réciproquement proportionnelles aux poids des corps C et $M+N$, le centre de gravité des trois corps restera en P.

Corollaire II. Il suit de ce corollaire, du théorême précédent et de ses corollaires, que si les centres de gravité d'un nombre quelconque de corps, se meuvent uniformément suivant des lignes droites situées ou non dans le même plan, le centre de gravité de tous ces corps décrira uniformément une droite, ou il restera en repos. Dans le premier cas, le poids total des corps se

fera sentir dans tous les points de cette dernière droite ; et, dans le second, il ne se fera sentir qu'en un seul point qu'il suffira de soutenir, pour que le système reste en équilibre, dans toutes les positions des corps.

THÉORÈME XXXIII. *Lorsque les centres de gravité particuliers d'un nombre quelconque de corps, se meuvent uniformément et pendant le même tems suivant des droites parallèles entre elles, auquel cas le centre de gravité du système se meut aussi uniformément suivant une droite parallèle à celles-là et pendant le même tems,* 1°. *si tous les mobiles vont dans le même sens, le produit de leur somme par la droite que décrit le centre de gravité du système, est égal à la somme des produits de chaque corps par le chemin que fait son centre de gravité particulier ;* 2°. *si tous les mobiles ne vont pas dans le même sens, le produit de la somme de tous les corps par le chemin du centre de gravité du système, est égal à la somme des produits de chacun des corps qui vont dans le même sens, par le chemin du centre de gravité de chacun d'eux, moins celle des produits analogues pour tous les corps qui vont dans le sens contraire.*

Fig. 59. 1°. Soient donc AE, BH, CL, DO les droites parallèles parcourues par A, B, C, D, si MN parallèle à celles-là est la droite que décrit en même tems le centre de gravité du système, on aura

$$(A+B+C+D)MN = A\times AE + B\times BH + C\times CL + D\times DO.$$

D'abord, si l'on ne considère que les deux corps A et B et leur centre de gravité F, et qu'on suppose les trois centres de gravité parvenus en E, G, H, et les droites BA, HE prolongées jusqu'à leur rencontre en R, on sait (pag. 37 et 38) que

$$(A+B)\,RG = A\times RE + B\times RH,$$

mais à cause des triangles semblables RAE, RFG, RBH, on peut remplacer RG, RE, RH par FG, AE, BH, et la propriété précédente devient

$$(A + B)\, FG = A \times AE + B \times BH.$$

On peut regarder les deux corps A et B comme un seul corps dont le centre de gravité F parcourt uniformément FG, tandis que le corps C décrit uniformément et dans le même tems la parallèle CL : I étant le centre de gravité du système, on aura, d'après ce qui vient d'être démontré

$$(A + B + C)\, IK = A \times AE + B \times BH + C \times CL,$$

et enfin l'énoncé du théorême.

2°. Soit A le centre de gravité du système des corps qui vont dans le même sens, et C le centre de gravité du système des corps qui vont en sens contraire du précédent. Les corps A et C parcourent uniformément et dans le même tems les parallèles AB, CD : soit P le centre de gravité de la masse $A + C$: on sait que le chemin PR du centre P est suivant la parallèle PR aux droites AB, CD, comprise entre les transversales AC, BD. Fig. 65.

Menons par P parallèlement à BD la droite EPF qui rencontrera AB en E et le prolongement de CD en F: on aura

$$AE = AB - PR, \quad CF = CD + PR,$$

et les triangles semblables APE, CPF donneront

$$AE : CF :: PA : PC,$$

donc

$$AB - PR : CD + PR :: PA : PC,$$

mais P étant le centre de gravité des corps A et C, on aura

$$PA : PC :: C : A,$$

conséquemment

$$AB - PR : CD + PR :: C : A,$$

d'où l'on tire

$$A \times AB - C \times CD = A \times PR + C \times PR = (A + C)\, PR ;$$

donc, etc.

Corollaire Ier. On déduit aisément de là, 1°. que si

Fig. 61. $ABCD$, $IKLM$, $EFGH$ sont trois polygones semblables décrits uniformément dans le même tems, et dans le même sens par les corps A, I, E, et $RSTV$ le polygone semblable décrit de la même manière par le centre de gravité du système, on aura

$$(A+I+E)RSTV = A \times ABCD + I \times IKLM + E \times EFGH ;$$

Fig. 62. 2°. que si le polygone $EFGH$ est parcouru en sens contraire des deux autres, on aura

$$(A+I+E)RSTV = A \times ABCD + I \times IKLM - E \times EFGH.$$

Corollaire II. La conclusion précédente s'étend aux cercles et aux courbes semblables décrits uniformément, pendant le même tems, dans les mêmes sens, ou dans des sens contraires, par les centres de gravité d'autant de corps et par celui de leur système.

Corollaire III. Si les centres de gravité particuliers de toutes les portions d'une ligne ou d'une surface, décrivent en même tems des droites parallèles, ou les

côtés homologues de polygones semblables, ou enfin des élémens parallèles de courbes semblables, le produit fait de la droite ou de la surface par le chemin de son centre de gravité, est égal à la somme ou à la différence des produits de chacune des portions de la droite ou de la surface, par le chemin de son centre de gravité particulier, en ayant égard aux sens du mouvement des élémens de la droite ou de la surface.

On a déja vu quelques applications de ces principes dans le chapitre précédent : ils servent encore à trouver les longueurs des portées moyennes dans *les déblais et les remblais.*

CHAPITRE VII.

Des Machines.

On définit ordinairement *les machines* des instrumens propres à transmettre l'action des forces : tous les corps sont donc des machines.

Lorsque les forces réagissent les unes sur les autres par l'intermède d'un corps ou d'un système de corps, elle ne peuvent se faire équilibre sans remplir certaines conditions ; or, au moyen des machines, on peut mettre en équilibre des forces qui ne satisfont pas à ces conditions ; ce qui exige dans ces machines des obstacles, c'est-à-dire, des lignes ou des points fixes qui les empêchent d'obéir au mouvement que les forces tendent à imprimer et qu'elles imprimeraient en effet; il suffit donc que les résultantes soient dirigées vers ces obstacles capables d'ailleurs d'une résistance suffisante pour les détruire. Ainsi, qu'un corps pesant, appuyé contre un autre point fixe, soit sollicité par une puissance considérable, il est possible d'établir l'équilibre avec une puissance médiocre, et, pour cela, il ne faut que disposer cette force de telle manière que la résultante de la grande et de la petite force passe par le point fixe supposé capable d'une résistance suffisante. C'est donc improprement qu'on dit, dans le cas d'équilibre, qu'une petite puissance en détruit une grande ; ce n'est pas par la petite puissance que la grande est détruite ; la première ne détruit réellement

qu'une petite partie de la grande, et les obstacles font le reste.

Il est essentiel de distinguer entre l'effet d'une machine en repos, ou établissant l'équilibre, et celui d'une machine en mouvement. Dans le premier cas, il s'agit seulement de détruire ou d'empêcher le mouvement ; dans le second, il faut le faire naître et l'entretenir ; ce dernier cas exige visiblement une considération de plus. Ainsi, une force très-petite peut bien, par l'intermède d'une machine, soutenir en équilibre un poids très-considérable ; mais s'il s'agit de l'élever à une hauteur donnée, d'un mètre, par exemple, il faudra que le point d'application de la puissance parcoure un nombre de mètres d'autant plus grand, qu'elle sera elle-même plus petite par rapport au poids. Si une puissance n'est que la centième partie d'un poids, elle pourra bien le soutenir au moyen d'un treuil, mais pour le mouvoir, il faudra qu'elle parcoure cent mètres pour descendre le poids d'un seul mètre.

Qu'une machine soit destinée à élever un poids P à une hauteur donnée H ; que F soit la force employée à produire cet effet, V la vitesse estimée dans le sens de la force, et T le tems de l'action ; on a toujours

$$FVT = PH.$$

De là est résulté ce principe fondamental : *dans toute machine en mouvement, on perd toujours en tems ou en vîtesse, ce que l'on gagne en force.* A la vérité, on peut souvent disposer du tems à volonté, tandis qu'on ne peut employer qu'une force limitée.

Toutes les machines, à l'exception de la *machine funiculaire,* peuvent se rapporter au *levier* ou au *plan incliné.*

Du Levier.

Le levier est une verge inflexible, droite ou courbe, qui n'a que la faculté de tourner autour d'un point d'appui.

Archimède, dans le livre intitulé : *De l'Équilibre des plans* ou *de leurs centres de gravité*, établit ces demandes :

1°. Des *graves* égaux, c'est-à-dire, des poids égaux, suspendus aux extrémités de longueurs égales se font équilibre ;

2°. Des *graves* égaux, suspendus aux extrémités de longueurs inégales, ne se font pas équilibre : celui qui est suspendu à l'extrémité de la plus grande longueur, entraîne l'autre ;

3°. Si des graves suspendus aux extrémités de deux longueurs, se font équilibre, et que l'on augmente l'un de ces graves, l'équilibre sera rompu ; si l'on retranche quelque chose de l'un de ces graves, l'équilibre n'aura plus lieu ;

4°. Si des graves suspendus aux extrémités de deux longueurs, sont en équilibre, des graves respectivement égaux, ajoutés de part et d'autre, ne troubleront pas l'équilibre.

On conclut aisément de ces demandes :

1°. Que des graves qui se font équilibre aux extrémités de longueurs égales, sont nécessairement égaux ;

2°. Que des graves inégaux suspendus à des longueurs égales, ne se font pas équilibre ;

3°. Que des graves inégaux suspendus à des longueurs inégales, peuvent être en équilibre. Nous démontrerons que le plus grand sera suspendu à l'extrémité de la plus petite longueur.



PROBLÈME. *Assigner les conditions d'équilibre du levier.*

Soit une verge matérielle AB qu'on nomme *levier*, ayant la faculté de tourner autour du point fixe D qu'on nomme *point d'appui*, et supposons deux forces quelconques P' et P'' appliquées immédiatement ou par l'intermédiaire de cordons aux deux extrémités A et B. Il s'agit de trouver les conditions d'équilibre dans cette machine, en faisant cependant abstraction du poids du levier auquel nous aurons égard ensuite. Fig. 66.

Il est clair que les composantes n'étant pas égales et directement opposées, les forces ne pourront être en équilibre qu'autant que leur résultante passera par le point d'appui, et que son effet sera détruit par la résistance de cet obstacle fixe. Or, deux forces ne pouvant admettre une résultante qu'autant qu'elles sont dans un même plan, il faut donc pour l'équilibre :

1°. *Que le levier et les deux forces soient dans un même plan.*

Il reste donc à dire que la résultante passe par le point d'appui : c'est ce qu'on exprimera au moyen de la propriété (pag. 28, 29 et 30) ; qui suppose le parallélogramme : le moment de la résultante est égal à la somme des momens des composantes, en prenant les momens par rapport au point fixe D, et en écrivant que, pour ce point, le moment de la résultante est nul; ainsi, en imaginant du point D des perpendiculaires $DM = p'$, $DN = p''$ sur les directions des forces P' et P'', on devra avoir cette relation

$$P'p' - P''p'' = 0\,, \quad \text{d'où} \quad P'p' = P''p'',$$

en observant (pag. *idem*) que les momens des composantes

doivent avoir des signes contraires, parce que le point de départ des perpendiculaires tombe dans l'angle entre les forces.

Donc 2°. *les momens des forces par rapport au point d'appui, doivent être égaux.*

Ces deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour l'équilibre, et la dernière suppose que les forces agissent dans le même sens.

Remarque. Si la résultante ne fait pas un angle droit avec le levier au point d'appui, le levier glissera sur le point d'appui du côté de l'angle aigu inférieur, à moins qu'un obstacle ne s'oppose à ce glissement ; on se procurera cet obstacle, en perçant le levier d'un trou au travers duquel on fera passer une tige ou axe qui servira de point d'appui. Alors, il suffira pour l'équilibre, que la résultante passe par le centre de l'axe, et elle pourra faire, avec le levier, un angle quelconque.

Corollaire Ier. Au moyen du levier, on peut, avec une petite puissance, en contrebalancer une très-grande ; car de la relation

Fig. 66.

$$P' = P'' \times \frac{p''}{p'},$$

on conclut que la perpendiculaire p' étant très-grande par rapport à p'', la force P' doit être très-petite par rapport à P'', pour l'équilibre.

Corollaire II. La pression exercée sur le point d'appui a pour mesure l'intensité de la résultante, puisque c'est cette résultante qui occasionne cette pression : elle est la même que si les forces étaient immédiatement appliquées

au point d'appui, sous leurs grandeurs et leurs directions primitives. Si donc la résistance de cet appui n'est pas indéfinie, on pourra juger ce qu'elle doit être pour que ce point ne cède pas à l'action des forces.

Corollaire III. Si les forces P', P'' sont parallèles, on peut, au rapport des perpendiculaires DM, DN, substituer celui des bras de levier DA, DB. *Ainsi, pour l'équilibre des forces parallèles appliquées aux extrémités d'un levier droit, les forces* P′, P″ *doivent être réciproquement proportionnelles aux bras de levier* DA, DB. Nous avons vu, en effet (pag. 36), que le point D qui opérait cette division, était celui d'application de la résultante : c'est aussi le lieu de l'obstacle fixe. Fig. 67.

Passons au levier coudé ADB aux deux extrémités duquel sont appliquées deux forces quelconques P', P''. Fig. 68.

Comme ce levier coudé ADB ne peut être en équilibre, sans que le levier droit ADB' ne soit pareillement en équilibre, on dira donc d'abord *que les deux forces et le levier coudé doivent être dans un même plan* : et comme par rapport au levier droit, on a

$$P' : P'' :: DN : DM,$$

On conclura en second lieu, qu'*il faut que les forces soient réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires menées du point d'appui, sur leurs directions, ou que les momens des forces, par rapport à ce point, soient égaux*, condition sous laquelle la résultante passe par le point fixe D, et est détruite par la résistance suffisante de ce point.

Si maintenant on veut avoir égard au poids du levier, on imaginera les masses des bras de levier DA, DB Fig. 69.

concentrées en leurs centres de gravité I, I', et on supposera ces points sollicités par des forces parallèles Q, Q' représentatives des poids de ces bras de levier ; alors le levier ne sera plus qu'une ligne sans pesanteur, sollicitée par les quatre forces P', Q, Q', P'' qui agissent dans le même sens ; si du point d'appui D on imagine les perpendiculaires $Dn = q$, $Dn' = q'$ sur les directions des forces parallèles Q, Q', puis les perpendiculaires $DM = p'$, $DN = p''$ sur les directions des forces, on aura, pour l'équilibre, cette relation

$$P'p' + Qq = P''p'' + Q'q',$$

qui exprime que les forces P' et Q, P'' et Q' tendent à faire tourner le levier dans des sens contraires autour du point d'appui D par lequel passe leur résultante (pag. 38).

Remarque. Le levier pourrait être sollicité par des puissances en nombre quelconque, appliquées à ses deux extrémités : alors on réduirait préliminairement chacun de ces groupes de forces à une seule force, et on rentrerait dans le cas précédent.

THÉORÈME XXXIV. *Si des forces égales ou inégales en nombre quelconque, agissent dans le même sens, tangentiellement à différens points d'une circonférence qui n'ait que la faculté de tourner autour de son centre, la force qui leur fera équilibre, sera égale à leur somme, et elle pourra être appliquée à l'un quelconque des points de la circonférence, mais dans une direction tangentielle, de manière cependant quelle agisse dans un sens contraire à celui des forces.*

Fig. 70. Soit un levier coudé AFB dont les bras FA, FB sont

égaux, et soient appliquées à ses extrémités deux forces égales P', P'', sous des directions perpendiculaires à FA et FB : on aura, pour l'équilibre, $P' = P''$. Si on considère séparément les leviers coudés $A'FB$, $A''FB$ etc. dont les bras sont égaux, et qu'on suppose en A', A'' des puissances P''', P^{iv} de directions perpendiculaires à $A'F$, $A''F$, qui tendent à faire tourner chacun de ces leviers autour de F dans un sens contraire à celui qui résulte de l'action de la force P'', on aura aussi pour l'équilibre... $P''' = P''$, $P^{iv} = P''$. Donc, si toutes les forces P', P''', P^{iv}, etc., agissent en même tems aux extrémités A, A', A'' des leviers AFB, $A'FB$, $A''FB$, et qu'on applique en B et perpendiculairement à FB, une force $= 3P''$, il y aura équilibre dans le système de ces leviers.

Mais si l'on suppose qu'on augmente chacune des deux forces P' et P'' d'une même force π', chacune des deux forces P''' et P'' d'une même force π'', chacune des deux forces P^{iv} et P'' d'une même force π''', les forces. . . $P' + \pi'$, $P'' + \pi'''$, $P^{v} + \pi^{iv}$ deviendront inégales, et cependant l'équilibre sera conservé dans la machine formée du système de ces leviers soumis à l'action des forces $P' + \pi'$, $P''' + \pi'''$, $P^{iv} + \pi^{iv}$ et $3P'' + \pi' + \pi''' + \pi^{iv}$. En sorte que si l'on continue à désigner par P', P''', P^{v}, etc. les forces qui agissent en A, A', A'', et par P'' la force $3P'' + \pi' + \pi'' + \pi'''$ qui agit en B, on aura toujours, dans le cas d'équilibre,

$$P' + P''' + P^{iv} = P''.$$

Cette conclusion s'étend à un nombre quelconque de forces, et on en déduit le théorême énoncé.

La balance ordinaire est trop connue pour qu'il soit nécessaire de la décrire ; cette balance sera exacte si, 1°. le point d'appui ou de suspension, divise le *levier* ou

le *fléau* en deux parties égales ; et si, 2°. le centre de gravité de la machine se trouve dans la verticale passant par le point de suspension. Mais de ce qu'une balance est en équilibre d'elle-même, il ne faut pas conclure qu'elle remplisse ces conditions : en effet, les bras de levier étant inégaux, il suffira qu'ils soient réciproquement proportionnels aux charges suspendues à leurs extrémités (chacune de ces charges se compose des chaînes et du bassin vide). Dans ce cas, si dans les deux bassins on met deux poids égaux, il n'y aura plus équilibre, et on s'assurera de cette manière que la balance n'est pas bien conditionnée. Pour que deux poids A et B soient en équilibre au moyen d'une telle balance, il faut qu'ils soient réciproquement proportionnels aux bras de levier, et par là on connaîtra le rapport entre les longueurs de ces bras : si on transpose ces poids, l'équilibre n'aura plus lieu.

On pourra néanmoins employer une telle balance, et par deux opérations, déterminer avec précision le poids d'un corps.

Soit P le poids inconnu du corps, soient x et y les deux bras inégaux de la balance, et supposons que P, placé dans le bassin qui répond au bras de levier x, fasse équilibre au poids connu A placé dans l'autre bassin : on aura

$$Px = Ay;$$

si l'on transpose le poids P, ou si on le transporte dans le bassin suspendu à l'extrémité du bras de levier y, et qu'il fasse équilibre à un poids connu B placé dans l'autre bassin, on aura

$$Py = Bx.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, on trouvera, après la division par yx,

$$P^2 = AB, \quad \text{d'où} \quad P = \sqrt{AB}.$$

Le poids cherché est donc moyen proportionnel géométrique entre les deux poids connus auxquels il fait alternativement équilibre dans les deux bassins de la balance.

Lorsque les bras de levier et les poids des bassins et des chaînes, étant parfaitement égaux, deux corps sont en équilibre, on en conclut (chap. V et pag. 110), que les *masses* sont égales; on aura ainsi les rapports entre les masses des différens corps, au moyen d'une balance exacte et sensible, et d'un grand nombre de petits poids égaux, en déterminant le nombre de ces poids, nécessaire pour tenir ces masses en équilibre. Nous avons vu (chap. V), que lorsqu'on transporte un corps d'un lieu dans un autre, son poids varie proportionnellement à la pesanteur qui change; mais il est impossible de s'en appercevoir au moyen de la balance, puisque les poids de tous les corps croissent ou décroissent dans le même rapport: il faudrait donc, pour rendre cette variation sensible, comparer le poids d'un corps à une force qui ne dépendît point du changement de pesanteur; or le moyen le plus simple est d'employer à cet usage la force élastique de l'air.

On distingue trois espèces de levier; dans celui qu'on appelle *du premier genre*, l'appui est entre la puissance ou la force P' et la résistance P'' à vaincre. Dans *le levier du second genre*, le poids P à soulever, la résistance ou l'obstacle à vaincre, est entre le point d'appui D et la puissance P'. Enfin, dans *le levier du troisième genre*, la puissance P' est entre l'appui D et la résistance P. Dans un levier du premier genre, la résistance du point d'appui

Fig. 66, 67, 68 et 69.
Fig. 71.
Fig. 71.

Fig. 73. D, peut être représentée par une force R' égale et directement opposée à la résultante R de P' et P'', et agissant de D vers R' : en sorte que la résultante R'' de R' et P', devra, pour l'équilibre, être détruite au point B, ce qui arrivera toujours s'il y a en B un obstacle ou point fixe, et alors on a le levier du second ou du troisième genre. Dans le levier du second genre, la puissance est toujours plus petite que la résistance : le contraire a lieu dans le levier du troisième genre.

PROBLÈME. *Soit un levier droit* AB, *de grosseur uniforme, appuyé sur l'obstacle* D : *soit en* A *un poids* M, *et*
Fig. 74. *qu'il s'agisse de trouver une longueur* DB *telle que le poids donné* M', *suspendu au point* B, *fasse équilibre à* M.

Faisons $AD = a$, $AB = y$, et désignons par p le poids de l'unité de longueur du levier : on aura cette équation

$$Ma = M'(y - a) + py\left(\tfrac{1}{2}y - a\right),$$

en observant que le poids py du levier est suspendu au milieu de sa longueur, que je suppose à gauche de D. On tire de là

$$y = \frac{pa - M' \pm \sqrt{\{(M' - pa)^2 + 2a(M + M')p\}}}{p}.$$

Soit $M' = 0$, et on trouvera que le poids seul du levier DB, fait équilibre au poids M à une distance finie

$$y = \frac{pa \pm \sqrt{\{p^2a^2 + 2paM\}}}{p}.$$

Cette formule montre que la question comporte deux

solutions qu'il sera facile d'interpréter sous l'hypothèse $M = 0$.

Le *peson* que l'on appelle aussi *romaine*, sert à peser des marchandises de différens poids, en n'employant qu'un seul poids connu qui ne varie point.

Le *peson* est un levier AB suspendu par une anse CD qui le divise en deux bras AC, BC fort inégaux. On attache à l'extrémité A du bras CA le plus court, un bassin ou un crochet pour porter les marchandises dont on veut connaître le poids. L'autre bras CB passe au travers d'un anneau H qui porte un poids constant F. Fig. 75.

Pour connaître le poids du corps placé dans le bassin ou suspendu au crochet, on éloigne ou l'on rapproche le poids F de la chape jusqu'à ce que le levier demeure en équilibre ; et le numéro de la division du levier, sur laquelle se trouve l'anneau H, indique le poids du corps.

Pour donner une idée de la manière de diviser ce levier, supposons que le centre de gravité du levier AB et du bassin vide, soit en C: alors il y aura équilibre autour du point C. Si l'on suspend des poids F et Q dont le second soit pris pour unité, et si F suspendu à l'extrémité de $C1$, fait équilibre au poids Q appliqué en A, on n'aura qu'à diviser le bras CB en parties $C1$, 12, 23, etc., égales entre elles et à $C1$.

Les divisions du fléau étant ainsi numérotées par les chiffres 1, 2, 3, 4, etc., lorsque le poids F sera en équilibre avec celui du corps soutenu par le crochet ou par le bassin, le numéro de la division où s'arrêtera l'anneau, indiquera le nombre d'unités de poids de ce corps.

Le *peson* appelé *danois*, parce qu'on s'en sert communément en Danemarck, et qu'on pourrait nommer Fig. 76.

suédois, parce qu'il est presque le seul en usage en Suède, est une verge de bois ou de fer qui porte à son extrémité B un crochet ou un bassin pour soutenir des marchandises, et qui se termine à son autre extrémité par une masse A.

La verge BC de ce peson, passe au travers d'un anneau C destiné à le soutenir en équilibre.

Le point C de la verge, autour duquel le peson garni de sa masse et de son crochet ou bassin vide, demeure en équilibre, est le centre de gravité de ce peson.

On proportionne ordinairement la masse, la verge et le bassin ou le crochet, de manière que leur centre de gravité commun C soit très-rapproché de la masse A.

Pour connaître le poids de la marchandise soutenue par le bassin ou par le crochet, on éloigne l'anneau de la masse A jusqu'à ce que le peson chargé de la marchandise et porté par l'anneau, demeure en équilibre ; alors le numéro de la division de la verge où se trouve l'anneau, indique le poids de la marchandise soutenue par le bassin ou par le crochet.

Lorsqu'on connaît le poids du peson et son centre de gravité, c'est-à-dire, le point C sur lequel il demeure en équilibre à vide, il est aisé de déterminer les divisions de la partie BC de sa verge.

Fig. 77. Car le poids du peson et de son bassin vide, devant être regardé comme une puissance verticale P appliquée à leur centre de gravité commun C, et le poids de la marchandise contenue dans le bassin comme une autre puissance verticale Q appliquée à l'extrémité B de la verge, lorsque le tout sera en équilibre autour de l'anneau situé en quelque point D, on aura

$$P : Q :: BD : DC, \quad \text{d'où} \quad P + Q : P :: BC : BD,$$

et par conséquent

$$BD = BC \times \frac{P}{P + Q}.$$

Ainsi, en imaginant successivement dans le bassin une, deux, trois, quatre, etc., unités de poids, on trouvera toutes les valeurs correspondantes de BD, c'est-à-dire, tous les points de division D pour une, deux, trois, etc. unités de poids, en multipliant par le poids du peson, la longueur BC de sa verge prise depuis son extrémité jusqu'à son centre de gravité, et divisant successivement le produit par le poids du peson, augmenté successivement d'une, de deux, de trois, etc. unités de poids.

Supposons que le poids du peson, c'est-à-dire, de sa masse, du bras de levier et du bassin ou du crochet, soit un (car on ne comprend point, dans ce poids, celui de l'anneau qui doit le soutenir en équilibre); on prendra sur la partie BC de sa verge, des parties $B1$, $B2$, $B3$, $B4$, $B5$, $B6$, etc., égales à la moitié, au tiers, au quart, au cinquième, au sixième, au septième, etc., de la partie BC de la verge; et les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., indiqueront une, deux, trois, quatre, etc., unités de poids, c'est-à-dire que lorsque le bassin ou le crochet sera chargé, et que l'anneau qui portera tout le système en équilibre, répondra à la division numérotée 1, ou 2, ou 3, ou 4, ou, 5, ou 6, etc., le poids suspendu vaudra autant d'unités de poids. A gauche de C se trouvent les fractions de l'unité de poids, comprises entre zéro et l'unité.

Du Plan incliné.

Lorsqu'un point matériel est pressé contre un plan inébranlable et inflexible par une force perpendiculaire au plan, en ce point, il est clair que le point doit rester en équilibre, puisqu'il n'y a pas de raison pour qu'il glisse dans un sens plutôt que dans un autre.

Réciproquement, un point matériel pressé contre un plan incliné par une force, ne peut rester en repos qu'autant que la force est perpendiculaire ou normale au plan au point d'appui. Car, si cette force était inclinée sur le plan, elle pourrait se décomposer en deux autres, l'une perpendiculaire au plan, l'autre située dans ce plan : mais la première serait détruite par la résistance du plan, et la seconde jouirait de la plénitude de son effet, en sorte que le point céderait à son action, et conséquemment il ne serait plus en équilibre.

Donc, si un corps sollicité par des forces quelconques P, P', P'', P''' au nombre desquelles il faut compter son poids, ne repose sur le plan incliné MN que par le
Fig. 78. seul point I, il ne pourra demeurer en équilibre, à moins que ces forces n'aient une résultante unique R, passant par le point de contact I, et normale en ce point au plan incliné MN : car, si la résultante passe par tout autre point tel que O, il est visible que le corps soumis à l'action de cette force unique, roulera le long du plan soit en remontant soit en descendant.

Si le corps repose sur le plan incliné par une surface finie, la résultante toujours normale au plan, doit passer par un des points de sa base ; et s'il s'appuie par plusieurs points, il faut que la résultante encore normale au

plan, le rencontre dans l'intérieur du polygone formé par tous les points de contact.

Lorsqu'un corps est pressé par plusieurs forces contre une surface courbe, il faut le considérer comme s'il reposait sur le plan tangent à la surface courbe au point de contact de cette surface avec la base du corps. Ainsi, pour l'équilibre, la direction de la résultante, doit être normale à la surface courbe au point de contact. Par cette raison, lorsqu'un levier est traversé par un axe cylindrique, ou lorsqu'il repose sur un tel axe, il faut, pour l'équilibre, non-seulement que la résultante des forces passe par le point d'appui, mais encore qu'elle soit normale en ce point à la surface convexe du cylindre.

Dans le cas où le corps serait soumis à l'action de plusieurs forces, nous supposerons que ces forces concourent, parce qu'autrement elles pourraient ne pas admettre une résultante unique (chap IV.).

PROBLÈME. *Trouver la relation entre le poids d'un corps et la force qui le retient en équilibre sur un plan incliné.*

Soit P le poids du corps, qui est une force verticale appliquée à son centre de gravité G; soit P' la force qui le retient en équilibre.

1°. *Les forces* P *et* P' *doivent se rencontrer.* Fig. 79.

Soit O ce point de rencontre : le plan mené par P et P', devant être à-la-fois perpendiculaire au plan incliné, puisqu'il passe par la résultante normale à ce plan, et au plan horisontal, puisqu'il contient la direction de P qui est verticale, coupera les deux plans suivant les lignes LK et LH dont l'angle mesurera leur inclinaison.

Donc 2°. *la force qui retient un corps pesant en équilibre, doit être dans un plan vertical et perpendiculaire au plan incliné, et la résultante de cette force et du poids, doit être normale au plan incliné, et passer par un des points de la base du corps.*

Si sur les représentations OA, OB des forces P et P', on construit un parallélogramme, on aura (page 12) la proportion

$$P : P' :: \sin P'OR : \sin POR,$$

laquelle deviendra

$$P : P' :: \sin P'OR : \sin KLH,$$

d'où 3°.

$$P' = P \times \frac{\sin KLH}{\sin P'OR},$$

et comme le sinus d'un angle est aussi celui de son supplément, on en conclura que la force $P_{,}$ appliquée suivant $OP_{,}$, et agissant de $P_{,}$ vers O retiendra le corps en équilibre, ce qu'on savait d'avance.

Corollaire Ier. D'après la proportion ci-dessus, la puissance P' sera la plus petite possible par rapport au poids P, lorsque l'angle $P'OR$ aura le plus grand sinus possible ; mais ce plus grand sinus répond à l'angle droit, et alors la direction de la puissance devient perpendiculaire à la normale, ou parallèle à la longueur LK du plan incliné. Dans ce cas, la proportion devient

$$P : P' :: 1 : \sin HLK :: LK : KH.$$

Ainsi, *lorsque la puissance est parallèle à la longueur du plan incliné, elle est au poids du corps qu'elle y retient*

en équilibre, comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.

La puissance a donc d'autant plus d'avantage sur le poids, que la hauteur du plan est plus petite par rapport à sa longueur : et lorsque cette hauteur est nulle, on a pour l'équilibre $P' = 0$, ce qu'on savait d'avance.

Corollaire II. Le cas où la puissance P' est la plus grande possible par rapport au poids P, est celui qui correspond à $P'OR = 0$, parce qu'alors

$$P' = P \times \frac{\sin KLH}{0} = \infty :$$

dans cette hypothèse, la puissance P' est perpendiculaire ou normale à la longueur du plan incliné. Ainsi, quelque grande que soit une puissance P' qui presse un corps pesant contre un plan incliné, ce corps ne peut rester en équilibre : si le contraire arrive, c'est que les surfaces des corps même les plus polis, ont des aspérités et des pores, c'est-à-dire, des pointes et des cavités, et que, dans le contact, il y a pénétration des parties saillantes dans les pores, circonstance qui empêche l'une des surfaces de glisser librement sur l'autre. Mais ici nous faisons abstraction de cette force de frottement, ainsi que de plusieurs autres obstacles au glissement.

Corollaire III. Lorsque la puissance P' est horisontale, c'est-à-dire, parallèle à la base LH du plan incliné, l'angle $P'OR$ devient égal à LKH, et la proportion trouvée devient

$$P : P' :: \sin LKH : \sin KLH :: LH : KH.$$

Ainsi, *la puissance étant horisontale, il faut, pour*

l'équilibre, qu'elle soit au poids du corps, comme la hauteur du plan incliné est à sa base.

PROBLÈME. *Un corps pesant étant retenu en équilibre sur un plan incliné, par deux forces* P′, P″, 1°. *assigner la relation entre ces forces et le poids du corps; 2°. évaluer la pression sur le plan incliné.*

Fig. 80. P étant le poids du corps, nous supposerons, 1°. que les forces P, P', P'', soient dans un même plan; 2°. que ces trois forces concourent en un point M qui peut n'être pas le centre de gravité G du corps; 3°. que ces forces admettent une résultante unique, normale au plan incliné, et qui le rencontre dans un des points de la base du corps. Sous ces hypothèses, l'équilibre a lieu, et il s'agit d'assigner la relation entre les directions des forces.

Le plan des forces coupera donc le corps suivant une section qui contiendra le centre de gravité G et le point de concours des forces, et il rencontrera les plans incliné et horisontal suivant deux lignes LK et LH dont l'angle mesurera l'inclinaison du plan sur lequel repose le corps.

Si par le point de concours M on imagine une normale YMY' au plan incliné, et une parallèle $X'MX$ à la longueur de ce plan, et qu'on désigne par α, α', α'', les angles entre l'axe XX' et les directions des forces P, P', P'', qui agissent de M vers P, P' et P'', angles comptés de MX et au-dessus de l'axe XMX', on pourra décomposer chacune des forces du système en deux autres, l'une suivant l'axe XX', l'autre suivant l'axe YY', et on aura, par exemple, pour les deux composantes de la force P' représentée par MA, savoir, $P' \cos \alpha'$ suivant l'axe XX', et $P' \sin \alpha'$ suivant l'axe YY' : pour

celles de P'', représentée par MB, savoir, suivant l'axe des x, $-P'' \cos \alpha''$, et suivant l'axe des y, $-P'' \sin \alpha''$, parce que l'angle α'' excède 200^d.; enfin, $-P \cos \alpha$, $-P \sin \alpha$, pour les composantes suivant les mêmes axes, du poids P représenté par MC. Ainsi la somme des composantes suivant l'axe des x, sera .... $P \cos \alpha + P' \cos \alpha' - P'' \cos \alpha''$, et celle des composantes suivant l'axe des y, sera.......................... $-P \sin \alpha + P' \sin \alpha' - P'' \sin \alpha''$. Or, cette dernière force étant normale en I au plan incliné, est détruite par la résistance de ce plan, et comme d'ailleurs elle mesure la pression sur le plan, que nous désignerons par N, on aura d'abord

$$N = -P \sin \alpha + P' \sin \alpha' - P'' \sin \alpha''.$$

En effet, la composante de P' suivant l'axe des y, étant directement opposée à celles des forces P et P'' suivant le même axe, la somme des pressions dues à ces deux dernières forces, doit être diminuée de $P' \sin \alpha'$. On exprimera donc l'équilibre du point M entre les actions des forces P, P', P'', en écrivant

$$P \cos \alpha + P' \cos \alpha' - P'' \cos \alpha'' = 0,$$

puisqu'on dit par là que le point M ne peut avoir de mouvement suivant l'axe XX'.

Cette dernière condition, ainsi que la valeur de la pression resteraient les mêmes, si on supposait les forces données appliquées en I sous des directions parallèles aux directions primitives. On peut étendre cette solution à un nombre quelconque de forces concourantes.

Corollaire. Si l'on fait $P' = 0$, on aura cette mesure de la pression

$$N = -P \sin \alpha - P'' \sin \alpha'',$$

et cette condition d'équilibre

$$P \cos \alpha - P'' \cos \alpha'' = 0;$$

d'où

$$P \cos \alpha = P'' \cos \alpha''.$$

Lorsque $\alpha'' = 200^{d.}$, la force P'' agit suivant MX', et alors la pression n'est due qu'au poids du corps; on a d'ailleurs, en observant que le signe — de cos α'', a déja été introduit,

$$P \cos \alpha = P'',$$

c'est-à-dire

$$P \sin KLH = P'',$$

d'où

$$P : P'' :: 1 : \sin KLH :: LK : KH,$$

conclusion trouvée plus haut sous la même hypothèse. On pourra aussi supposer à la force P'' une direction parallèle à la base du plan incliné.

Remarque. Lorsqu'un corps ne repose que par un seul point sur un plan incliné, la pression, au point d'appui, est égale à la résultante des forces qui retiennent le corps en équilibre. Si le corps repose sur le plan incliné par deux points A et B, la résultante qui passe par un des points de la ligne AB, peut se décomposer en deux forces parallèles appliquées en ces points (pag. 43 et 44), lesquelles sont les mesures des pressions aux points d'appui A et B. Si le corps est soutenu sur trois points A, B et C, la résultante doit rencontrer le plan incliné dans l'intérieur du triangle ABC, et on sait encore évaluer les pressions en ces trois points. Mais lorsqu'il y a plus de trois points de

contact, les pressions, en ces points, sont indéterminées.

PROBLÈME. *Trouver la relation entre les poids de deux corps qui sont liés entre eux, et qui se font équilibre sur deux plans inclinés adossés.*

Nous supposerons les centres de gravité des deux corps, situés dans le plan qui coupe les deux plans inclinés adossés et celui de leur base, suivant le triangle LBH, dont les angles L et H à la base sont les inclinaisons des plans inclinés sur le plan horizontal. Les deux corps que nous considérons, et dont nous désignerons les poids par P et Q, sont liés l'un à l'autre par un fil qui passe sur une poulie de renvoi B, de manière que les directions des deux parties Mm, $M'm'$ du fil, soient respectivement parallèles aux longueurs KL et KH des plans inclinés. Fig. 81.

On peut remplacer l'action du corps Q sur le corps P, action qui se transmet de l'un à l'autre au moyen du fil, par celle d'une force P' appliquée en N, qui agirait de la même manière sur P, à l'aide du cordon Mm : et comme alors le corps P est retenu en équilibre sur le plan KH, par une force d'une direction parallèle à la longueur du plan incliné, on a (pag. 124 et 125) cette relation

$$P : P' :: HK : KG.$$

Mais la même force P', appliquée en N', tiendrait aussi le corps Q en équilibre sur le plan incliné KL, parce que la tension du fil est la même dans toute son étendue ; donc

$$Q : P' :: KL : KG.$$

De ces deux proportions on déduit celle-ci :

$$P : Q :: HK : KL.$$

On peut encore résoudre très-simplement cette question, en décomposant chacun des poids P et Q dont les directions sont verticales, en deux composantes, l'une normale au plan incliné, l'autre parallèle à ce plan : désignant alors par p' et q' ces composantes parallèles aux longueurs des plans inclinés, on aura ces expressions de p' et q'

$$p' = P \times \cos GKH = P \sin H = P \times \frac{KG}{KH}$$

$$q' = Q \times \cos LKG = Q \sin L = Q \times \frac{KG}{KL},$$

donc, comme il faut pour l'équilibre, que $p' = q'$, on aura cette condition trouvée précédemment

$$P \times \frac{KG}{KH} = Q \times \frac{KG}{KL},$$

d'où

$$P : Q :: KH : KL,$$

proportion de laquelle on conclut que *les poids des deux corps en équilibre sur deux plans inclinés adossés, doivent être proportionnels aux longueurs des plans inclinés.*

Problème. *Un corps pesant étant de lui-même en équilibre entre deux plans inclinés, trouver le rapport entre son poids, et les pressions des deux plans.*

Fig. 82. Soient P le corps, G son centre de gravité, $ABCD$, $EBCH$ les deux plans sur lesquels il s'appuie : on dé-

composera le poids P du corps qui agit suivant la verticale QG, en deux composantes QS et QT normales aux plans inclinés EC, AC, et passant par l'un des points de contact du corps avec chacun de ces plans, condition qui exige qu'on choisisse convenablement le point Q qui, dans la figure que nous considérons, ne peut avoir qu'une position, parce que le corps ne repose que par un point sur le plan AC. Ainsi, le plan TQS est en même tems vertical et perpendiculaire aux deux plans inclinés. On pourra donc imaginer le corps coupé par un plan vertical $QKNM$ mené par son centre de gravité G perpendiculairement aux deux plans inclinés; la section BC des deux plans inclinés, perpendiculaire à ce plan $QKNM$, sera horisontale; d'où il suit qu'un corps pesant ne peut se soutenir de lui-même entre deux plans inclinés que dans le cas où la rencontre BC de ces deux plans, est horisontale. Les intersections MN, KN des plans inclinés par le plan $QKNM$ perpendiculaire à BC, sont les longueurs des plans inclinés EC, AC. Si par BC on imagine un plan horisontal, la rencontre de ce plan par $QKNM$, sera OL : ainsi, les deux plans inclinés seront réduits aux triangles rectangles, KNL, MNO qui seront de même hauteur, en prenant $MO = KL$.

Si l'on désigne par P, S, T le poids du corps et les pressions normales sur les plans inclinés, on aura cette suite de rapports

$$P : S : T :: KM : KN : NM.$$

En effet, si l'on représente le poids du corps par la longueur QD, prise sur la verticale passant par le centre de gravité G, et qu'on forme le parallélogramme $QBDC$ dont les côtés QB, QC sont perpendiculaires aux longueurs KN, MN des plans inclinés, on aura Fig. 83.

$$P : S : T :: QD : QB : QC :: QD : QB : BD;$$

mais parce que les triangles QBD, MKN ont leurs côtés respectivement perpendiculaires,

$$QD : QB : BD :: KM : KN : NM,$$

et conséquemment

$$P : S : T :: KM : KN : NM.$$

Problème. *Trouver la position dans laquelle une droite pesante est en équilibre entre deux plans inclinés.*

Fig. 84. Par un point S quelconque de l'un des plans, on mènera deux droites SB, SC perpendiculaires l'une au plan KN, l'autre au plan MN, puis la verticale BC; par le point S et par le milieu E de BC on mènera une droite SR terminée aux plans inclinés : cette droite, ainsi que toute parallèle sr, sera en équilibre entre les deux plans.

En effet, si par le centre de gravité G de la droite SR, on mène entre les deux lignes SB, SC une verticale DA, les droites AD et BC seront divisées également en G et E; ainsi, AR sera parallèle à SC, et par conséquent perpendiculaire au plan incliné MN. Le poids de SR étant représenté par AD, et cette force pouvant être supposée appliquée au point A lié avec G, se décomposera en deux forces représentées par les côtés AS, AR du parallélogramme AD; et parce que les directions des composantes AS, AR sont perpendiculaires aux plans KN et NM, elles seront détruites par la résistance de chacun de ces plans, et la droite RS restera immobile entre ces plans. Il en sera de même de toute parallèle.

On peut se proposer d'évaluer les pressions ou les char-

ges de trois sphères sur lesquelles repose une quatrième sphère dont le poids est connu.

De la Machine funiculaire.

La machine funiculaire est un appareil de cordes par l'intermédiaire desquelles des forces réagissent les unes sur les autres.

Nous supposerons dans tout ce qui va suivre, les cordes ou les cordons parfaitement flexibles, inextensibles et de plus réduits à leurs axes, parce que c'est suivant l'axe de la corde que se transmet l'action de la force qui agit à son extrémité.

Lemme Ier. Si une force P agit à l'extrémité d'un cordon placé sur un plan, le cordon, en cédant à l'action de la force, est entraîné, en s'étendant suivant la direction de cette force; il n'éprouve alors aucune *tension*.

Lemme II. Si deux forces égales sont appliquées en sens contraires aux deux extrémités d'un cordon, elles se font équilibre : que l'une des deux forces soit remplacée par un point fixe capable d'une résistance précisément égale à l'action de cette force, l'équilibre existera comme précédemment, et il est clair que la tension du cordon sera due à la seule force qui agit. Même conclusion si le point fixe était à l'autre extrémité. Donc, *la tension d'une corde sollicitée en ses deux extrémités, par deux forces égales et contraires, est due à l'une quelconque de ces deux forces, et conséquemment elle a lieu dans les deux sens.*

Lemme III. Si deux forces P'' et P', toujours appli-

quées en sens contraires aux deux extrémités d'un cordon, sont inégales, et qu'on ait $P'' = P' + p'$; la partie P' de force P'' tend le cordon, en faisant équilibre à P', et la force excédente p' est entièrement employée à entraîner le système suivant sa direction, c'est-à-dire, qu'elle ne contribue en rien à la tension. Ce cas rentre dans le premier, en observant que la corde tendue et soumise à l'action de p', est comparable à une verge rigide. Donc *la tension d'une corde sollicitée en ses deux extrémités par deux forces inégales, est due à la plus petite des deux forces.*

Lemme IV. Si la machine funiculaire n'est point composée de cordes qui aboutissent au même point, mais qui soient nouées les unes aux autres en différens faisceaux, aux points m, m', m'', liés au point M; et s'il y a équilibre autour du nœud M, en supposant tous les cordons dans un même plan, c'est que les résultantes des faisceaux, dont les actions se transmettent en M par les axes des cordons mM, $m'M$, $m''M$, se détruisent en ce point. Or, la résultante des forces P', P'' qui est dirigée suivant mM, resterait la même en grandeur et en direction, si les composantes P', P'', agissaient sur tout autre point du cordon mM' sous les mêmes grandeurs et sous des directions parallèles aux directions primitives; de sorte que l'état d'équilibre subsisterait encore si chacune des forces du système venait agir immédiatement sur le point M sous sa grandeur et parallèlement à elle-même. (Fig. 85.)

Ainsi l'équilibre aurait encore lieu, si les forces P', P'', par exemple, étant toujours appliquées en m, toutes les autres venaient agir immédiatement en M, sous des directions parallèles et leurs grandeurs primitives.

Donc, en général et toujours dans le cas d'équilibre,

la tension d'un des cordons mM, ou $m'M$ ou etc., est due à la résultante des forces qui agissent en m ou en m', etc., ou encore à la résultante générale de toutes les forces qui agissent sur tous les autres nœuds.

Corollaire. Il résulte encore de ce qui précède, que si un corps Q est sollicité par un nombre quelconque de puissances P', P'', P''', P^{v}, l'effet de ces puissances sera le même que si elles étaient toutes appliquées au point M ou au point N, sous les mêmes quantités et dans des directions parallèles à celles sous lesquelles elles agissaient primitivement. Ainsi, soit que le corps reste en équilibre, soit qu'il cède à l'action des puissances, la tension du cordon NM est toujours due à la résistance du corps qui neutralise en tout ou en partie l'effet des forces, puisque, dans le premier cas, le cordon NM est entre deux forces égales et contraires; et que, dans le second, la résistance Q est la plus petite des deux forces directement opposées (*lemme* II). Fig. 86.

Ainsi, la machine funiculaire ne doit être considérée que comme un moyen d'employer plus commodément les puissances que les circonstances ne permettent pas d'appliquer à un point unique du corps, et qui se trouvent disposées de telle manière que, sans rien changer à leur énergie, elles produisent le même effet que si elles étaient toutes appliquées à ce point, sous leurs quantités primitives et sous des directions parallèles.

PROBLÈME. *Trouver les conditions d'équilibre de trois forces dirigées suivant les axes de trois cordons qui aboutissent à un nœud.*

Pour que ces trois forces soient en équilibre, il faut que l'une quelconque d'elles, soit égale et directement Fig. 87.

opposée à la résultante des deux autres, ce qui exige que les axes des cordons soient dans un même plan. On aura donc (pag. 12) cette suite de rapports,

$$P : P'' : P''' :: \sin P'MP''' : \sin PMP''' : \sin PMP''.$$

Le parallélogramme des forces et toutes ses conséquences reçoivent ici leur application.

Corollaire Ier. Si les extrémités des cordons MP'', MP''' sont fixes, les valeurs de P'' et P''' déduites de ces rapports, mesureront les résistances que doivent opposer les points fixes pour ne pas céder à l'action de la force P', c'est-à-dire, qu'elles exprimeront les tensions des cordons MP'', MP'''.

Corollaire II. Une corde tendue en ligne droite par deux forces P'', P''', sera donc pliée par la plus petite force P' appliquée transversalement à l'un de ses points : car l'angle $P''MP'''$ étant supposé à très-peu près égal à deux droits, si d'ailleurs les deux angles $P'MP''$, $P'MP'''$ sont égaux, auquel cas chacun d'eux sera à-peu-près un angle droit, on aura d'après la relation précédente,

Fig. 88.

$$P' = P'' \times \frac{\sin P''MP''}{\sin P'MP'''}$$

ainsi la force P' sera très-petite par rapport à la force P'', et aussi par rapport à la force P'''. Il suit de là qu'on ne peut tendre une corde pesante en ligne droite, si ce n'est verticalement, puisqu'elle sera toujours pliée par son poids qui est une force verticale appliquée à son milieu.

Remarque. Les conditions précédentes supposent que le point M soit invariablement attaché à chacun des cordons, ou que le nœud qui rassemble ces cordons, soit fixe. Mais si le point M pouvait couler le long du cordon

Fig. 89.

$P' MP'''$, comme ferait un anneau dans lequel on passerait un cordon, en supposant le cordon P' lié à cet anneau ; alors il faudrait, pour l'équilibre, que la direction de la force P' divisât également l'angle $P''MP'''$. En effet, deux points F et F' du cordon $P''MP'''$ étant fixes, la longueur FMF' est constante, et l'anneau supposé d'un diamètre infiniment petit, décrit, en glissant, une ellipse dont les foyers sont F et F', et MF, MF' les rayons vecteurs. Or, pour que le point M soumis à l'action de la force P', soit en équilibre sur cette courbe, il faut que la direction de P' soit perpendiculaire à la tangente à l'ellipse au point M : il faut donc (*Elém. de Géom. analyt.*) que la direction de P' divise également l'angle FFM'. Ainsi les forces P'', P''', ou les tensions des cordons MF, MF' doivent être égales (*not. prél.*).

THÉORÈME XXXV. *Si les puissances* P′, P″, P‴ *appliquées aux extrémités de trois cordons réunis fixement en* M, *se font équilibre, et si elles sont proportionnelles aux longueurs* AM, BM, MD, *le nœud* M *sera le centre de gravité du triangle* ABD. Fig. 90.

Divisons la droite AB en deux parties égales en G, et menons par G une droite MGF double de MG, cette droite représentera en grandeur et en direction la résultante des forces P' et P'' : mais puisqu'il y a équilibre, $MF = MD$, et de plus MF et MD sont en ligne droite. Donc $MG = \frac{1}{2} MF = \frac{1}{2} MD = \frac{1}{3} GD$. Donc (théor. XIV), etc.

On pourrait prouver encore ces deux réciproques :

1°. *Si le nœud* M *est le centre de gravité du triangle* ABD, *et si les trois puissances* P′, P″, P‴ *sont proportionnelles aux longueurs* MA, MB, MD, *elles se feront équilibre :*

2°. *Si les trois puissances sont en équilibre et que le nœud* M *soit le centre de gravité d'un triangle, les trois*

puissances seront proportionnelles aux trois distances du nœud aux trois sommets du triangle.

Remarque. Les propositions analogues aux précédentes auraient encore lieu pour quatre puissances en équilibre aux extrémités de quatre cordons réunis fixement au centre de gravité M d'une pyramide, et dirigées de ce centre vers les quatre angles trièdres, en supposant ces forces proportionnelles aux parties des cordons entre M et les quatre sommets.

PROBLÈME. *Soit maintenant un polygone funiculaire plan, ou un assemblage de plusieurs points* M', M'', M''', *etc., liés entre eux par des cordons* M'M'', M''M''', *etc., points*
Fig. 91. *sur lesquels agissent des forces* P', P'', P''', *etc., au moyen d'autres cordons : on demande les conditions d'équilibre de ce polygone, en supposant cependant que chacun des nœuds* M', M'', M''', *etc., n'assemble pas plus de trois cordons.*

D'abord, si l'équilibre a lieu autour de chaque nœud M', M'', M''', etc., il a lieu dans toute l'étendue du système, et comme il ne peut exister autour d'un nœud sans que les trois cordons qui y aboutissent, ne soient dans un même plan, on conclut de là que le polygone peut être plan, et il le sera en effet, si toutes les forces sont dans un même plan. Réciproquement, si tout le polygone est en équilibre, cet équilibre a lieu autour de chacun des nœuds en particulier, et dans le cas où chaque nœud n'assemble que trois cordons, comme nous l'avons supposé, ces trois cordons sont dans un même plan, ce qui n'emporte cependant pas la condition que tout le polygone soit dans un meme plan. Ainsi, autour du nœud M'', la tension t''' du cordon $M''M'''$, comptée de M'' vers M''', est une force égale et directement opposée à la résul-

tante de P'' et de la tension t'' du cordon $M''M''$, comptée de M'' vers M' ; de même autour du nœud M''' la tension t''' de M''' en M''', est une force égale et directement opposée à la résultante des forces P^{iv} et P^{v}. Chaque cordon qui unit deux nœuds, est donc entre l'action de deux forces égales et directement contraires, et sa tension peut être attribuée à chacune de ces deux forces.

Ainsi, on a ces proportions au point M'

$$P' : P'' :: \sin P''M'M'' : \sin P'M'M''$$
$$P'' : t'' :: \sin P'M'M'' : \sin P'M'P''.$$

Au point M''

$$t'' : P''' :: \sin P'''M''M''' : \sin M'M''M'''$$
$$P''' : t''' :: \sin M'M''M''' : \sin M'M''P'''.$$

Au point M'''

$$t''' : P^{iv} :: \sin P^{iv}M'''P^{v} : \sin M''M'''P^{v}$$
$$P^{iv} : P^{v} :: \sin M''M'''P^{v} : \sin M''M'''P^{iv}.$$

Si l'on multiplie par ordre, 1°. les deux premières proportions, on aura le rapport de P' à t''; 2°. les trois premières proportions, on aura le rapport de P' à P''; 3°. le produit des quatre premières fera connaître le rapport de P' à la tension t'''. Enfin, le produit de toutes les proportions donnera le rapport entre les forces extrêmes.

Corollaire Ier. Si les directions des forces P'', P''', P^{iv} divisent également les angles $P'M'M''$, $M'M''M'''$, $M''M'''P^{v}$, les forces P', P^{v} et les tensions des cordons $M'M''$, $M''M'''$, seront égales, en observant qu'il y a séparément équilibre autour de chaque nœud.

Corollaire II. Si au lieu des forces P'', P''', P^{v}, il y a en M', M'', M''', des points fixes sur lesquels passe la corde $P^{\text{v}}M'M''M'''P^{\text{v}}$, les forces P^{v}, P^{v} appliquées aux extrémités de cette corde, seront égales et la corde sera partout également tendue. En effet, supposons un cordon $P^{\text{v}}MP''$ enroulé autour d'une poulie M d'un diamètre infiniment petit et d'un centre fixe, et tendu par des forces P^{v} et P''; concevons un autre cordon $P''MP^{\text{v}}$ enroulé autour de la même poulie et tendu par des forces P'' et P'; supposons de plus que les deux forces P'' et les deux forces P^{v} agissent dans des sens directement contraires; il y aura équilibre autour du point M, de la même manière que si les forces étaient liées à ce point. Il doit donc arriver que les résultantes de chaque système de deux forces appliquées aux extrémités de chacun des cordons, soient égales et directement opposés, condition qui ne peut évidemment avoir lieu, sans que chacune de ces résultantes ne divise également l'angle entre les forces dont elle représente l'effet sur le point M. Conséquemment les forces P^{v} et P'' sont égales. Donc (fig. 91), dans l'hypothèse actuelle, les forces P', P^{v} et les tensions des cordons sont égales. ***Ainsi, lorsque deux forces tendent une corde sur le contour d'un polygone, ou d'une courbe quelconque plane solide, ou résistante, ces deux forces sont égales pour l'équilibre, et la tension est constante dans toute l'étendue de la corde.***

Fig. 92.

Corollaire III. Lorsque les directions des forces P'', P''', P^{v} sont parallèles, on a toujours entre les forces et les tensions les mêmes rapports que ci-dessus dans le cas d'équilibre; mais il arrive alors que toutes les forces et les côtés du polygone sont dans un même plan: car autour de chaque nœud, les trois cordons sont dans un même plan; mais le cordon $M''P''$ étant parallèle au

cordon $M'P''$, le plan $P'M'P''$ est le même que le plan $M'M''P'''$, et ainsi de suite.

Corollaire IV. Qu'on suppose que les forces P'' et P''' (fig. 91) deviennent des poids Q et P dont les directions seront parallèles, que les cordons soient réduits à trois, Fig. 93. et que le premier et le dernier soient fixement attachés par leurs extrémités, alors le produit de la seconde par la troisième proportion (pag. 139), sera

$$P'' : P''' :: \sin P'M'M'' \times \sin P'''M''M''' : \sin P'M'P'' \times \sin M'M''M''';$$

or

$$\sin P'M'M'' = \sin BM'M'', \ \sin P'''M''M''' = \sin MM''A,$$
$$\sin P'M'P'' = \sin BM'N, \ \sin M'M''M''' = \sin M'M''A;$$

d'ailleurs

$$P'' = Q, \ P''' = P;$$

donc

$$Q : P :: \sin BM'M'' \times \sin MM''A : \sin BM'N \times \sin M'M''A$$
$$:: \sin M''M'M \times \sin MM''N :: \sin MM'N \times \sin M'M''N,$$

ou

$$Q : P :: \frac{\sin M''M'M}{\sin MM'N} : \frac{\sin M'M''N}{\sin MM''N} :: \frac{M''M}{M''M'} : \frac{M'N}{M''M'},$$

donc enfin

$$Q : P :: M''M : M'N.$$

Ainsi, les poids Q et P sont réciproquement proportionnels aux portions $M'N$ et $M''M$ de leurs cordons.

Ce corollaire sert à construire une balance funiculaire propre à évaluer le poids d'un corps Q au moyen d'un poids connu P. En effet, ayant attaché les deux extrémités

d'un cordon très-fin à deux points fixes, et suspendu à deux points quelconques M' et M'' au moyen de deux cordons aussi très-fins, le poids donné P et le corps Q à peser, on tendra un fil indéfini suivant AM'' et un autre suivant BM' : les distances des intersections N et M aux points de suspension M' et M'', ainsi connues, serviront avec le poids P, à trouver celui de Q.

THÉORÈME XXXVI. *Soit un polygone plan, funiculaire et régulier d'un nombre quelconque de côtés; soient des puissances appliquées à tous ses angles, agissant dans le plan de ce polygone, des points* A, B, C, *etc., vers*
Fig. 94. P, Q, S, *etc., et dont les directions aillent passer par le centre du cercle circonscrit : dans le cas d'équilibre*, 1°. *tous les côtés du polygone funiculaire, seront tendus également;* 2°. *toutes les puissances seront égales;* 3°. *leur somme sera à la tension d'un des côtés, comme le contour du polygone est au rayon.*

Si l'on joint les milieux H, I, K, etc., des arcs soutendus, et qu'on mène des rayons aux sommets H, I, K, etc. du nouveau polygone, les côtés des triangles IGH, IGK, etc., seront perpendiculaires aux directions des tensions des cordons AF, AB et de la force P, des tensions des cordons AB, BC et de la force Q, etc. Or, si l'on observe que deux forces et leur résultante sont proportionnelles aux trois côtés d'un triangle, respectivement perpendiculaires à leurs directions on conclura,

1°. Que les tensions des cordons étant proportionnelles aux rayons, sont égales; qu'il en sera de même des forces, puisqu'elles sont comme les côtés HI, IK, etc.; et 2°. en désignant par t la tension d'un cordon, que

$P : Q : S : T$ etc. $: t :: HI : IK : KL : GH$, etc.

d'où

$P + Q + S + T$ etc. $: t ::$ *contour* : *rayon*.

Corollaire. Comme tout ce qui se dit d'un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, peut se dire d'un cercle qui en est la limite, il faut conclure que le théorême ci-dessus, convenablement énoncé, convient au cercle.

PROBLÊME. *De l'équilibre dans un polygone funiculaire plan.*

Nous allons traiter le problême précédent par l'analyse ; mais pour mieux suivre la solution, il sera bon de lire ce que nous avons dit dans le dernier chapitre, sur les conditions d'équilibre d'un nombre quelconque de forces qui agissent dans un plan sur un point matériel libre.

Par le point M' autour duquel il doit y avoir séparément équilibre, imaginons deux axes rectangulaires XX', YY' Fig. 91. auxquels on rapporte les directions des forces qui agissent de M' vers P', P'' et M''. Si l'on désigne par α', α'', a'' les angles comptés de l'axe $M'X$ et au-dessus, entre cet axe et les directions des forces et de la tension du cordon $M'M''$, on aura $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$, $t'' \cos a''$ pour les composantes de P', P'', t'' suivant l'axe des x, et $P' \sin \alpha'$, $P'' \sin \alpha''$, $t'' \sin a''$ pour les composantes des mêmes forces suivant l'axe des y ; et il faudra observer que les signes des cosinus et des sinus dépendent des positions de P', P'', t'' par rapport aux axes. Or, à cause de l'équilibre autour du nœud M', la somme des composantes, suivant l'axe des x, est nulle, et il en est de même de celle des composantes

suivant l'axe des y; autrement il y aurait lieu à une résultante : on a donc ces deux conditions

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + t'' \cos a'' = 0,$$

$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + t'' \sin a'' = 0.$$

La tension t'' doit être considérée comme ayant lieu de M' en M'' pour faire équilibre à la résultante de P' et P'', et comme ayant lieu de M'' en M' pour faire équilibre à la résultante de P'' et t''', et il en sera de même de chaque tension. D'après cela, et en faisant passer par M'' deux axes rectangulaires respectivement parallèles aux précédens, on aura pour conditions d'équilibre autour de M'',

$$-t'' \cos a'' + P''' \cos \alpha''' + t''' \cos a''' = 0$$

$$-t'' \sin a'' + P''' \sin \alpha''' + t''' \sin a''' = 0,$$

et ainsi des autres nœuds.

Toutes les forces P', P'', P''', etc., étant données, on connaît les angles α', α'', α''', etc., qu'elles font avec les axes des abscisses, ou avec un axe parallèle, et il reste à trouver, dans le cas d'équilibre, les tensions et les inclinaisons des cordons, c'est-à-dire, t'', t''', etc., a'', a''', etc.

En ajoutant la première équation de chaque groupe, on obtient ces relations

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + t''' \cos a''' = 0$$

$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' + t''' \sin a''' = 0,$$

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + P^{\text{IV}} \cos \alpha^{\text{IV}} + t^{\text{IV}} \cos a^{\text{IV}} = 0$$

$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' + P^{\text{IV}} \sin \alpha^{\text{IV}} + t^{\text{IV}} \sin a^{\text{IV}} = 0;$$

et ainsi de suite.

On est donc toujours conduit pour la tension d'un cordon qui unit deux nœuds, à des équations de la forme

$$t \cos a = - X, \; t \sin a = - Y, \text{ d'où } \operatorname{tang} a = \frac{Y}{X},$$

les quantités X et Y étant données.

Mais si on n'a que cinq forces P', P'', P''', P^{iv}, P^{v}, alors la tension t^{iv} qui doit être remplacée par P^{v}, est connue, ainsi que l'angle a^{iv} qui devient α^{v}; on a donc six équations, et seulement quatre inconnues à évaluer, savoir : t'', a'', t''', a'''; il reste donc, pour l'équilibre, deux équations de condition, qu'on obtient en ajoutant toutes les premières, puis toutes les secondes équations de chaque groupe : on trouve ainsi deux équations entre les données seulement, lesquelles sont

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \ldots\ldots\ldots + P^{\text{v}} \cos \alpha^{\text{v}} = 0$$

$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + \ldots\ldots\ldots + P^{\text{v}} \sin \alpha^{\text{v}} = 0.$$

Mais ces équations expriment précisément les conditions d'équilibre des forces données, ramenées à agir sur un point unique, sous des directions parallèles à leurs directions primitives et sous leurs grandeurs. (Chap. dernier.)

D'où on conclut que *pour que des forces se fassent équilibre au moyen d'un polygone funiculaire plan, il faut que si on les applique parallèlement à leurs directions et sous leurs grandeurs, à un même point, elles se fassent équilibre autour de ce point.* Ce point d'application peut être l'un quelconque des angles du polygone.

Si on laissait inconnues une force et sa direction, les deux équations de condition ci-dessus, serviraient à les déterminer : si l'un des cordons extrêmes a son extrémité fixe, sa tension et son inclinaison peuvent être déterminées, puisqu'alors on a six équations et six

inconnues : si les deux cordons extrêmes ont leurs extrémités fixes, le problème devient indéterminé, puisqu'on a six équations et huit inconnues.

Du Tour.

Le *tour*, *treuil*, *cabestan*, sont des machines qui peuvent être désignées génériquement par la dénomination de *tour*; elles ne diffèrent entre elles que par la manière dont elles sont employées; car, au fond, le mécanisme est le même. Il consiste dans un cylindre terminé par deux tourillons ou cylindres d'un plus petit diamètre et de même axe, destinés à tourner chacun dans une *fente*, *trou* ou *crapaudine*. Ce cylindre porte une roue ou des barres qui le traversent, et le plan
Fig. 95, 96, 97 et 98. de la roue ou des barres est perpendiculaire à son axe; une corde fixée par une extrémité à un point de la surface du cylindre, est attachée par l'autre au poids qu'on veut mouvoir. L'action de la puissance qui agit suivant une direction tangentielle à la roue ou perpendiculaire à l'extrémité d'une des barres, fait tourner le cylindre, enroule la corde autour de ce cylindre, et remonte le poids. Lorsque le cylindre est horisontal, (fig. 95, 96, 97, 98) la machine se nomme plus particulièrement *treuil*, et lorsque l'axe est vertical (fig. 99), elle se nomme *cabestan*. On peut toujours considérer le cylindre comme tournant autour de son axe pris comme ligne fixe.

PROBLÈME. *Trouver le rapport entre une puissance et une résistance en équilibre au moyen du treuil.*

Nous réduirons la machine à l'axe AB du cylindre, au plan MN de la grande roue, et à la section mn du
Fig. 100. cylindre, parallèle à MN, par un plan passant par l'axe

du cordon qui soutient le poids à élever suspendu à l'extrémité du rayon horisontal ci.

Ayant mené le rayon CF au point F où la puissance P' agit tangentiellement à la roue, concevons par l'axe AB et par CF un plan BCF qui coupe la section mn suivant cf parallèle à CF, plan qui sera perpendiculaire à ceux de la grande roue et de la section mni, et joignons les points F et f par une droite qui rencontrera l'axe AB en O. On pourra décomposer la force P' en deux autres qui lui soient parallèles, l'une Q appliquée en f et agissant dans le sens de P', l'autre Q' appliquée en O, et agissant en sens contraire; les points d'application f et O étant donnés, ainsi que la force P', on sait déterminer Q et Q'. (pag. 40).

De deux composantes Q et Q', la seconde passant par un des points de l'axe fixe du cylindre, ne peut avoir d'effet pour faire tourner le cylindre : la première seule doit donc faire équilibre au poids P; et comme Q et P agissent perpendiculairement aux deux extrémités f et i du levier coudé fci qui n'a que la faculté de tourner autour du point fixe c, on a pour condition de cet équilibre

$$Q \times cf = P \times ci, \quad \text{d'où} \quad Q = P,$$

à cause de $cf = ci$; mais en prenant le point O pour centre des momens, on sait que

$$Q : P' :: FO : fO :: CF : cf :: R : r,$$

en désignant par R et r les rayons de la grande roue et du cylindre : conséquemment

$$Q = P = \frac{P' \cdot R}{r}, \quad \text{d'où} \quad P' : P :: r : R.$$

Ainsi, pour l'équilibre du treuil, la puissance est au

poids, comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.

Remarque. On voit donc qu'au moyen de cette machine, la puissance prend de l'avantage sur la résistance. On observera que comme les actions de la puissance et de la résistance, se transmettent suivant les axes des cordes, il faudra augmenter les bras de levier CF, ci, du demi-diamètre de chacune de ces cordes.

Corollaire. Si le poids P était attaché à l'extrémité du rayon horisontal CI dans le plan de la roue, on aurait en FCI un levier coudé dont le point d'appui est en C, et conséquemment pour condition d'équilibre entre P' et P,

$$P'.R = P.r,$$

la même que ci-dessus. Donc *l'action de la puissance se transmet au poids à l'aide du treuil, comme si le poids et la puissance étaient dans un même plan, toujours appliqués tangentiellement au cylindre et à la roue.*

Cette conséquence pourrait être démontrée *a priori*, en supposant le rayon du cylindre égal au rayon de la roue, parce qu'alors la puissance P' pourrait être appliquée tangentiellement à une section quelconque du cylindre perpendiculaire à l'axe, qu'on pourrait prendre concentrique à mni : alors on aurait entre P' et P le rapport trouvé ci-dessus pour l'équilibre.

Il nous reste à déterminer les pressions sur les points d'appui A et B, et dans cette question, il est nécessaire d'avoir égard au poids total de la machine.

On observera d'abord que Q et P se composent en une force unique qui passe par c, pour l'équilibre, en sorte qu'on peut décomposer leur résultante R' appliquée en c, dans les deux forces Q et P : ainsi,

pour l'évaluation des pressions, on supposera que la puissance Q et le poids P agissent en c; or, les forces Q et Q', appliquées en c et O, auront pour résultante la force P', mais appliquée en C, à cause de ces rapports $Oc : OC :: Of : OF : P' : Q$. On n'aura donc qu'à décomposer chacune des forces P' et P appliquées en C et c en deux forces parallèles appliquées aux points A et B, problème qu'on sait résoudre. Quant au poids de la machine, on observera que le corps de cette machine étant divisé en deux parties symétriques par tout plan passant par l'axe fixe, son centre de gravité est en l'un des points de cet axe. Supposons ce point connu ; on imaginera la force représentative du poids de la machine, laquelle agit sur son centre de gravité, décomposée en deux forces parallèles appliquées en A et B, et on aura en chacun de ces points, deux forces qu'on composera en une seule qui représentera la pression totale en ce point.

Lorsqu'une puissance P' est appliquée à un point B de la circonférence de la roue d'un tour, et qu'une corde CD, enroulée autour d'un cylindre, tire sur la circonférence de la roue d'un second tour dont le cylindre Fig. 101. est enveloppé d'une corde FH qui tire sur la circonférence de la roue d'un troisième tour dont le cylindre est aussi enveloppé par une corde à l'extrémité de laquelle est suspendu un poids P, on a *un tour composé*. On trouve facilement ce rapport entre la puissance et le poids, dans le cas d'équilibre,

$$P' : P :: AC \times EF \times GI : AB \times ED \times GH$$

d'où $$P' = P \times \frac{AC}{AB} \cdot \frac{EF}{ED} \cdot \frac{GI}{GH},$$

d'où on peut conclure qu'au moyen de cette machine, la puissance prend sur la résistance, dans le cas d'équi-

libre, un avantage d'autant plus grand que le nombre des tours simples est plus considérable.

De la Poulie et des Moufles.

Une poulie est une roue dans l'épaisseur de laquelle on a creusé une gorge pour recevoir une corde : cette roue est traversée par un *boulon* ou *axe* porté par les branches d'une *chape*.

Fig. 102 et 103. *La poulie est fixe*, quand la chape est attachée à un point fixe : la puissance et la résistance à vaincre sont appliquées à la circonférence de la poulie, au moyen d'une corde qui en enveloppe une partie.

Fig. 104. *La poulie est mobile*, quand la chape est liée à la résistance ou au poids, et se meut avec elle.

Nous supposerons que les directions de la puissance et de la résistance à vaincre, soient dans le plan qui divise la poulie en deux parties égales, suivant son épaisseur.

PROBLÈME. *Trouver le rapport entre la puissance et la résistance en équilibre au moyen de la poulie fixe.*

Fig. 103. Si du centre de la poulie l'on mène les deux rayons CD, CE aux points de contact, et qu'on regarde la puissance et le poids comme deux forces qui agissent aux extrémités D, E d'un levier coudé ECD dont le point d'appui est en C, il ne pourra y avoir équilibre sans que ce levier coudé, qu'on peut considérer comme coupé dans la poulie, ne soit lui-même en équilibre, et alors on peut faire abstraction du reste de la poulie. Comme les bras de ce levier, sont perpendiculaires aux directions des forces, et de plus égaux, on doit avoir pour équilibre $P = P'$.

La charge du centre C, c'est-à-dire, la pression en ce point, doit être en quantité la résultante de P et P',

et à cause de l'égalité de ces forces, la direction de la résultante passant par le point de concours O des tangentes en D et E, doit diviser également l'angle EOD, et elle est détruite en C par la résistance de l'axe de la poulie. Si donc, on désigne cette résultante par R, on aura

$$P' : R :: \sin ROP : \sin POP',$$

mais si l'on mène la corde DE, l'angle $ROP = DEC$, $\sin POP' = \sin ECD$, et conséquemment la proportion ci-dessus devient

$$P' : R :: \sin DEC : \sin ECD :: DC : ED.$$

Ainsi, *dans le cas d'équilibre de la poulie fixe,* 1°. *la résultante doit passer par le centre ;* 2°. *la puissance est égale à la résistance,* 3°. *la résistance à vaincre ou la puissance est à la charge que supporte l'axe de la poulie, comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.*

Remarque. Lorsque la chape FC est mobile autour d'un point M fixe, elle se place d'elle-même dans la direction de la résultante qui est détruite par la résistance de ce point fixe. On voit donc encore que la poulie fixe ne donne aucun avantage à la puissance sur la résistance, mais qu'elle facilite l'action de cette puissance en lui permettant d'agir sous une direction quelconque.

PROBLÈME. *Trouver le rapport entre une puissance et une résistance en équilibre au moyen de la poulie mobile.*

P' étant la puissance et P le poids, il est évident que, dans le cas de l'équilibre, P représente ce que, dans la poulie fixe, nous avons appelé la charge de l'axe, ou du centre de la poulie fixe, et qu'on a alors Fig. 104.

$$P' : R \text{ ou } P :: DC : ED, \text{ d'où } P' = P \times \frac{DC}{ED}.$$

Si l'on désigne par β le demi-angle DOE, c'est-à-dire, l'angle $P'OC$ entre les directions de la puissance et de la résistance, on aura cette proportion

$$P' : P :: \sin\beta : \sin 2\beta :: 1 : 2\cos\beta,$$

d'où

$$P = 2P'\cos\beta.$$

Ainsi, à la première condition d'équilibre dans la poulie fixe, il faut ajouter la suivante pour la poulie mobile : *la puissance est au poids, comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde*, ce qui revient à cette relation : *la puissance est au poids, comme l'unité est au double du cosinus de l'angle entre les directions de la puissance et de la résistance.*

Remarque I. Au moyen de la poulie mobile, la puissance prend donc de l'avantage sur la resistance ou sur le poids, lorsque l'arc embrassé par la corde, est plus grand que le sixième de la circonférence, car alors la sous-tendante DE est plus grande que le rayon. Si les directions de P et P', sont parallèles, la sous-tendante est double du rayon, et la puissance n'est que la moitié du poids qu'elle tient en équilibre : ainsi, dans ce cas, avec une force capable de soutenir immédiatement un poids de 50 kilog., on peut faire équilibre à un poids de 100 kilog.

Remarque II. Lorsque les cordons sont parallèles et soumis l'un et l'autre à l'action d'une puissance, ces deux puissances sont égales pour l'équilibre, et chacune
Fig. 105. d'elles est la moitié du poids : car ce système revient à celui de deux forces parallèles appliquées aux deux extrémités du diamètre AB de la poulie, au centre de laquelle est attaché le poids : or, si on décompose le poids P

en deux autres suspendus aux points A et B, on aura en A et B deux forces égales et contraires appliquées aux deux extrémités de chacun des cordons AP' et BP : donc alors la tension du cordon est la même dans toute son étendue, et elle est due à l'une des forces P' ou à la moitié du poids.

Remarque III. Lorsque la poulie mobile est soutenue par deux puissances faisant entre elles un angle quelconque, la direction du poids divise cet angle également, et conséquemment les deux puissances sont égales.

Les combinaisons des poulies fixes et mobiles forment différentes machines composées, connues sous les noms de *mouffles*, *palans*, *caliornes*, *etc.*

Problème. *Soient une poulie fixe en* A *et un système de poulies mobiles* 1, 2, 3, *autour de chacune desquelles est enroulée une corde dont une des extrémités est fixée aux points* B, C, D, *et l'autre est sollicitée par la puissance* P', *ou attachée à la chape de la poulie précédente ; la poulie* 3 *porte un poids* P *suspendu à sa chape ; on propose de trouver le rapport entre la puissance* P' et *le poids* P *en équilibre au moyen de cette machine.*

Nommons t, t', t'' les tensions des cordons $B1$, $C2$, $D3$; Fig. 106.
β, β', β'' les demi-angles entre les cordons enroulés autour des poulies 1, 2, 3; comme chacune des poulies doit être en équilibre, la poulie A étant fixe, la tension t est mesurée par la puissance P', et la direction de la chape de chacune des poulies mobiles, divisant également l'angle entre les directions prolongées du cordon qui l'embrasse, la tension est la même dans toute l'étendue de chacun des cordons enroulés. On aura donc ces relations démontrées précédemment.

$$t' = 2t\cos\beta = 2P'\cos\beta;\quad t'' = 2t'\cos\beta';\quad P = 2t''\cos\beta'',$$

desquelles on déduit

$$P = 2^3 \cos \varepsilon \cos \varepsilon' \cos \varepsilon''.P'.$$

Donc, si le nombre des poulies mobiles était n, on aurait

$$P = 2^n P' \cos \varepsilon \cos \varepsilon' \cos \varepsilon'' \ldots\ldots$$

d'où l'on tire

$$P' = P \times \frac{1}{2^n \cos \varepsilon . \cos \varepsilon' . \cos \varepsilon'' \ldots\ldots}.$$

Si l'on mène les cordes des arcs enveloppés par les cordons, et les rayons aux points de tangence, et si l'on désigne par c', c'', c''' ces cordes pour les poulies 1, 2, 3, et par r', r'', r''' les rayons correspondans, on trouvera facilement que

$$P' : P :: r'''.r''.r' : c'''.c''.c',$$

d'où l'on déduit

$$P' = P \times \frac{r'''}{c'''} \cdot \frac{r''}{c''} \cdot \frac{r'}{c'}$$

Remarque. Pour donner à la puissance tout l'avantage
Fig. 107. possible sur le poids à soutenir, on rendra parallèles les directions des cordons, parce qu'alors.............. $\cos \varepsilon = \cos \varepsilon' = \cos \varepsilon'' \ldots = 1$: en sorte que

$$P' = \frac{P}{2^n}.$$

PROBLÈME. *Ayant un assemblage de poulies fixes* A,
Fig. 108. B, C, *et de poulies mobiles* a, b, c, *toutes embrassées par la même corde dont une de ses extrémités est fixée à un arrêt* S, *et l'autre est sollicitée par une puissance* P', *si à la chape de chacune des poulies mobiles, est suspendu*

un poids, il s'agit de trouver le rapport entre la puissance et la somme de ces poids, sous la condition de l'équilibre.

Si on désigne toujours par $2\theta'$, $2\theta''$, $2\theta'''$ les angles formés par les directions prolongées des cordons qui embrassent chaque poulie mobile, et qu'on observe que comme le système ne peut être en équilibre, sans qu'il y ait séparément équilibre dans chaque poulie mobile qu'on peut considérer comme isolée, et embrassée par une corde dont une des extrémités est attachée à un arrêt, tandis que l'autre peut être supposée tirée par une puissance P', puisque la tension du cordon est la même dans toute son étendue (Rem., pag. 151, Rem. II et III, pag. 152 et 153), on aura ces relations

$$Q' = 2P' \cos \theta', \quad Q'' = 2P' \cos \theta'', \quad Q''' = 2P' \cos \theta''',$$

desquelles on déduit

$$P' : Q' + Q'' + Q''' :: 1 : 2(\cos \theta' + \cos \theta'' + \cos \theta''').$$

Si, comme il est facile de le faire, on rend tous les cordons parallèles, la relation précédente deviendra

$$P' = \frac{Q' + Q'' + Q'''}{2.3},$$

et, pour un nombre n de poids,

$$P' = \frac{Q' + Q'' + Q''' + \text{etc.}}{2n},$$

et enfin, dans le cas de l'égalité des poids,

$$P' = \frac{Q'}{2}.$$

On trouverait encore, les cordons n'étant pas parallèles, ces relations,

$$Q' : Q'' :: MN \times KI : KH \times ML$$
$$Q' : Q''' :: MN \times GF : GE \times ML$$
$$Q'' : Q''' :: KH \times GF : GE \times KI$$

Il est bien entendu que le poids de chacune des poulies mobiles, est compris dans celui de la masse suspendue à sa chape.

Fig. 109, 110, 111. Une des manières les plus commodes et les plus avantageuses de disposer les poulies, est d'en former ce qu'on appelle une *moufle* : on nomme ainsi un assemblage de plusieurs poulies disposées d'une manière quelconque sur une même chape. Nous considérerons le système de la *fig.* 109, parce qu'il est le plus en usage. Dans la *fig.* 110, le poids est suspendu à l'extrémité d'une corde fixée par l'autre extrémité au point K de la chape des poulies mobiles. La moufle supérieure est supposée fixée à un crochet ou arrêt immobile, et la moufle inférieure est mobile, et elle supporte un poids : les poulies de chaque moufle ont toutes même diamètre, et elles sont traversées par un axe autour duquel chaque moufle a la faculté de tourner. Un même cordon à l'extrémité duquel est appliquée une force P', embrasse tour-à-tour les poulies fixes et mobiles, et son autre extrémité est attachée en F.

Fig. 190.

PROBLÈME. *Trouver le rapport entre une puissance et une résistance en équilibre au moyen de la machine que nous venons de décrire.*

Puisque deux poulies correspondantes prises l'une dans la moufle fixe et l'autre dans la moufle mobile, sont séparément en équilibre, le cordon éprouve, dans toute son étendue, comme nous l'avons déjà dit, la même tension qui ne peut être due qu'à la puissance P'. On peut donc

regarder chacune des poulies de la moufle mobile, comme embrassée par un cordon dont l'une des extrémités est fixe, et l'autre tirée par une puissance P', et les deux parties de ce cordon comme sensiblement parallèles; en sorte que comprenant dans le poids P, celui de la moufle mobile, et désignant par m le nombre des poulies de cette moufle, on pourra supposer qu'à la chape de chacune d'elles, soit suspendu un poids $\frac{P}{m}$, et on aura alors entre P' et $\frac{P}{m}$ la relation d'équilibre trouvée (pag. 152), savoir Fig.109.

$$\frac{P}{m} = 2P',$$

en observant qu'ici $\cos \mathfrak{C} = 1$; et conséquemment pour l'équilibre total

$$m\frac{P}{m} = 2mP', \text{ d'où } \frac{P}{n} = P',$$

n étant le nombre des parties de cordon, lequel est double de celui des poulies mobiles.

Ainsi, pour l'équilibre, la puissance P' n'est que la n^{me}. partie du poids.

Cette condition convient aux appareils 110 et 111.

Si la corde qui transmet l'action de la puissance Q au poids P, est enroulée autour du cylindre horisontal d'un treuil, la machine formée de cette combinaison, est appelée *chèvre*, et elle est employée à élever des masses considérables, telles que des pièces de canon, etc. Soit Q la puissance qui, appliquée perpendiculairement à l'extrémité de la barre du treuil, fait équilibre au poids P suspendu à la chape de la moufle mobile; on aura entre la puissance Q et la tension t de la corde enroulée

autour du cylindre, tension qui, dans le problême précédent, était due à P', cette relation (pag. 148),

$$Q = \frac{t \times r}{R}$$

en désignant par r et R le rayon du cylindre et la distance du point d'application de Q à l'axe de ce cylindre : or, d'après ce que nous venons de trouver,

$$t = \frac{P}{2m},$$

donc

$$Q = \frac{Pr}{2mR}.$$

Ainsi *pour l'équilibre de la chèvre, la puissance est au poids, comme le rayon du treuil, est à autant de fois la longueur du bras de levier, qu'il y a de cordons montans et descendans.*

Fig. 112. *Remarque.* La poulie mouflée offre d'une manière intuitive, la propriété dont jouissent la puissance et la résistance d'être réciproquement proportionnelles aux *vîtesses virtuelles*, en supposant cependant le parallélisme des cordons. Nous ne considérons qu'une poulie mobile, et nous supposerons l'une des extrémités du cordon, fixée à un arrêt, l'autre tirée par une puissance P', et les deux cordons KL, GP' parallèles. Pour que le poids ou la poulie remonte de son diamètre $= a$, ou pour que son centre passe de C en C', il faut que le point d'application I de la force, passant en I', on ait

$$LKMGI = LK'NG'I',$$

mais les arcs KMG, $K'NG'$ sont des moitiés de circonférences égales, donc

$$LK + GI = LK' + G'I',$$

c'est-à-dire,

$$LK - LK' = G'I' - GI = GI' - GI - GG',$$

et à cause de $LK - LK' = GG' = a$, on trouve

$$2a = II'.$$

On conclura de là que, dans un assemblage de deux poulies fixes et de deux poulies mobiles, si le poids remonte de a, la puissance parcourt, suivant sa direction, une longueur $4a$, et qu'ainsi si l'on désigne par v, v' les espaces parcourus par le poids et la puissance, on aura

	$v : v' :: 1 : 4$		
mais on sait que		donc	$Pv = P'v'$,
	$P : P' :: 4 : 1$		

conclusion qu'on peut généraliser. Or, les vîtesses v et v' étant très-petites, ce qui arrive si l'on suppose une légère perturbation d'équilibre, v, v' sont *des vîtesses virtuelles*, suivant les directions du poids et de la puissance, et on a une égalité entre les produits des forces par ces vîtesses. Si dans cette égalité on fait tout passer dans le premier membre, on voit que dans la somme égalée à zéro des produits des forces par les *vîtesses virtuelles* suivant ces forces, il faut prendre avec le signe — le produit par la vîtesse en sens contraire de l'action de la force. Le célèbre *Lagrange* a tiré de la poulie mouflée, une démonstration *du principe des vîtesses virtuelles*, dont nous déduirons bientôt les conditions d'équilibre des machines.

PROBLÈME. *Trouver les conditions d'équilibre dans l'assemblage des deux moufles formées de poulies mobiles* a, b, c, *et de poulies fixes* A, B, C.

Fig. 113, 1°. En imaginant le poids de la moufle mobile, ajouté au poids P à tenir en équilibre, et en désignant par n le nombre des poulies de la moufle mobile, si d'ailleurs les cordons sont parallèles, on a cette relation

$$P' = \frac{P}{2n},$$

pour le cas où l'extrémité de la corde est attachée à la moufle fixe : et

$$P' = \frac{P}{2n+1},$$

Fig. 113, 2°. si l'extrémité de la corde est fixée à la moufle mobile. En effet, on peut supposer le cordon qui va de la poulie c à la poulie D, fixement attaché à la traverse qui porte les poulies fixes, et le cordon DN parallèle à la direction des autres, tirée par une puissance P' dont l'effet est de soulever la traverse des poulies fixes : alors on aura $2nP' + P' = P$, d'où l'on déduit la relation posée ci-dessus. Il y a donc plus d'avantage dans cette dernière disposition.

Des Roues dentées.

La roue dentée est trop connue pour qu'il soit nécessaire d'en faire la description.

Fig. 114, 115, 116, 117, 118. Les figures (114, 115, 116, 117, 118) présentent les modèles de deux espèces d'engrenage très-usitées : dans les trois premières, la petite roue dentée, qui est au centre de chaque grande roue, se nomme *pignon*, et les dents de ces pignons se nomment *ailes*.

Dans la figure 117, les dents de la grande roue sont perpendiculaires à son plan ; ce qui tient lieu de pignon,

et qu'on appelle *lanterne*, est un assemblage de plusieurs barres qu'on nomme *fuseaux*, plantées dans les circonférences de deux plaques circulaires parallèles : cette machine fournit un moyen de produire un mouvement de rotation perpendiculaire au plan de la grande roue, dans lequel la puissance est censée agir.

La figure 118 présente le modèle d'un engrenage au moyen duquel on produit un mouvement de rotation dans un plan oblique à celui de la grande roue à laquelle est appliquée la puissance. Toutes ces dispositions d'engrenage, sont susceptibles d'une infinité de combinaisons, et ces recherches ne sont pas sans intérêt.

L'analogie qui existe entre le tour et les roues dentées est facile à saisir : on voit que la grande roue tangentiellement à laquelle agit la puissance, fait l'office de celle dont le plan est perpendiculaire à l'axe du cylindre, que le pignon tient lieu de ce cylindre, que les dents ne sont qu'un moyen de transmission de l'action de la puissance à la résistance, transmission qui se fait par d'autres roues et pignons qui donnent de l'avantage à la puissance sur la résistance.

PROBLÈME. *Trouver le rapport entre une puissance et une résistance en équilibre au moyen de deux roues dentées et de deux pignons à ailes.*

Soient P' la puissance qui agit tangentiellement à la grande roue, R, R', R'' les rayons des grandes roues, r, r', r'' ceux des pignons dont deux C et C' ont des ailes ou dents, tandis que le troisième est un cylindre faisant aussi corps avec la roue, et autour duquel s'enroule une corde à laquelle est suspendu un poids P. L'effet de P' est de presser une aile du premier pignon contre la dent Fig. 115.

de la seconde roue en contact en a : la réaction de cette dent est comparable à une force p agissant de a en p, en sorte qu'il y a équilibre entre les forces P' et p qui agissent perpendiculairement aux extrémités du levier coudé FCa, dont le point d'appui est au centre C : on a donc, 1°. (pag. 112)

$$P'.R=p.r:$$

mais l'effort en a de la dent du pignon contre celle de la roue, est une force π égale et directement contraire à p, dont l'action se fait sentir en a', en pressant une aile du second pignon C' contre la dent en contact en a', et la réaction de cette dent contre l'aile, est représentée par une force π' : en sorte que ces deux forces π et π' agissent dans le même sens et perpendiculairement aux extrémités du levier coudé $aC'a'$: on a donc, 2°.

$$\pi R' = \pi' r' :$$

mais la pression de la dent du second pignon contre celle de la roue, en a', pression que nous représenterons par $p' = \pi'$, et le poids P doivent se faire équilibre aux deux extrémités a', a'' du levier coudé $a'C''a''$: on a donc, 3°.

$$p'R'' = Pr''.$$

Ces trois relations qui expriment des équilibres partiels, multipliées membre à membre, donnent, en observant que $\pi = p$, $\pi' = p'$,

$$P'.RR'R'' = P.r.r'.r'',$$

de laquelle on déduit

$$P' = P.\frac{r}{R}.\frac{r'}{R'}.\frac{r''}{R''}.$$

Donc, *pour l'équilibre, la puissance est à la résistance, comme le produit des rayons des pignons, est à celui des rayons des roues.*

On voit donc que la puissance prend, dans le cas d'équilibre, un grand avantage sur la résistance.

Remarque. Supposons que le premier pignon dont le centre est C, ait huit ailes, et que la seconde roue dont le centre est C', ait trente-deux dents. Lorsque ce premier pignon aura fait un tour, la seconde roue n'aura fait qu'un quart de tour : ainsi le premier pignon fera quatre tours quand la seconde roue n'en fera qu'un. On voit donc que le nombre de tours du premier pignon, est au nombre de tours de la seconde roue, dans le même tems, dans le rapport inverse des nombres des ailes et des dents. Désignant par k le nombre des tours du premier pignon, par n le nombre de ses ailes, par K le nombre des tours de la roue qui engrène avec ce pignon, lequel sera le même que celui des tours de son pignon, et par N le nombre de ses dents, on aura

$$k : K :: N : n, \quad \text{d'où} \quad kn = KN,$$

pareillement

$$k'n' = K'N', \quad k''n'' = K''N'';$$

n', k'; n'', k''; N', K'; N'', K'' désignant les nombres des ailes et des tours des pignons, des dents et des tours des roues : la multiplication de ces égalités donne, en observant que $k' = K$, $k'' = K'$,

$$k.n.n'.n'' = K''.N.N'.N'' \ldots (1),$$

d'où on conclut, en général, que *le nombre de tours que fait le premier pignon ou la première roue, est au nombre*

de tours que fait, dans le même tems, la dernière roue ou le dernier pignon qui porte le poids, comme le produit des nombres des dents de toutes les roues, est à celui des ailes de tous les pignons.

Appliquons ce que nous venons de dire, à la solution de la question suivante.

On demande quels doivent être les nombres de dents de trois roues et des ailes de trois pignons, pour que le dernier pignon faisant un tour en douze heures, la première roue fasse un tour en un an?

L'année étant de 365 j. 5 h. 48′ 49″, ou à-peu-près de 365 j. 5 h. 49′ qui valent 525949′, et les 12 h. faisant 720′, il faut que, pendant un tour de la première roue, le dernier pignon fasse un nombre de tours, exprimé par le rapport $\frac{525949}{720}$ qui est celui d'une année à 12 h.; on aura donc $r=\frac{525949}{720}$, $K''=1$, et la relation (1) donnera

$$\frac{525949}{720}=\frac{N.N'.N''}{n.n'.n''}.$$

Si l'on prend arbitrairement $n=7$, $n'=8$, on trouvera

$$\frac{N.N'.N''}{7.8.n''}=\frac{525949}{720}, \text{ d'où } N.N'.N''=\frac{3681643.n''}{90}:$$

et comme le produit $N.N'.N''$ doit être un nombre entier, il faut pour n'' prendre 90, ou un multiple de 90 : l'un des pignons aurait donc au moins 90 ailes, nombre trop grand. Que l'on réduise la fraction $\frac{525949}{720}$ en fraction continue, et on sera conduit (Alg., sect. II) à ces fractions principales convergentes

$$\frac{1}{0}, \frac{730}{1}, \frac{1461}{2}, \frac{22645}{31}, \frac{24106}{33}, \frac{167281}{229}, \frac{525249}{720};$$

mais aucune de ces fractions, non plus que les fractions intermédiaires, n'ayant le dénominateur décomposable en trois facteurs, ainsi que l'exige la question, nous nous adresserons à la fraction $\frac{3681643}{90}$ sur laquelle nous opérerons de la même manière, et nous trouverons pour fractions convergentes

$$\frac{1}{0}, \frac{40907}{1}, \frac{245443}{6}, \frac{286350}{7}, \frac{3681643}{90}:$$

si l'on fait $n'' = 7$ dénominateur de la troisième fraction, on aura

$$N.N'.N'' = 286350 = 50.69.83.$$

On peut donc prendre et disposer à volonté trois roues de 50, 69 et 83 dents, et trois pignons de 7, 7 et 8 ailes. Pour vérifier cette solution, on observera que la fraction

$$\frac{N.N'.N''}{n.n'.n''} = \frac{286350}{7.7.8} = \frac{286350}{392},$$

représentant le nombre des tours que fait le dernier pignon pendant un an, en raison d'un tour en 12 heures, on aura pour la durée d'une révolution de la première roue, 365 j. 5 h. 48′ 58″ $\frac{38}{49}$, au lieu de 365 j. 5 h. 49′, ce qui est une différence très-petite.

Voyez sur la meilleure figure qu'on peut donner aux dents des roues d'une machine, *le livre* 10me. *de la Statique de M. Camus, de l'Académie Royale des Sciences.*

Du Cric.

Une des applications les plus simples qu'on ait faites du tour et des engrenages, est la machine nommée *cric*, qui sert à soulever, au moyen de la force d'un seul homme, des fardeaux considérables.

Fig. 119. Le *cric* est composé d'une barre de fer, dentée d'un côté, et qui n'est mobile que dans le sens de sa longueur : les dents de la barre, engrènent avec celles d'un pignon qu'une puissance fait tourner au moyen d'une manivelle.

La figure n°. 1. présente l'élévation extérieure d'un cric, ou l'on voit la *manivelle* et l'*encliquetage* dont l'utilité est d'empêcher la manivelle de tourner en sens contraire, lorsque la force n'étant plus appliquée à la manivelle, le fardeau porte toujours sur la barre de fer. La pièce *m* s'appelle *cliquet*. Les n°s. 2 et 3 font voir les deux espèces de mécanismes intérieurs. Dans le premier, c'est un seul pignon placé dans l'axe de la manivelle, qui s'engrène dans les dents de la barre verticale. Dans le second, et pour augmenter la force du cric, le pignon mis en mouvement par la manivelle; s'engrène dans une roue dentée portant elle-même un second pignon qui s'engrène dans les dents de la barre verticale.

PROBLÈME. *Trouver le rapport entre une puissance et une résistance en équilibre au moyen du cric.*

Dans la machine n°. 2, on peut considérer la réaction

du fardeau P à soulever, dans lequel on comprendra le poids de la barre, comme un poids P suspendu à l'extrémité de l'aile du pignon en contact avec la dent de la barre, de sorte qu'il doit y avoir équilibre entre ce poids agissant perpendiculairement à l'extrémité du rayon du pignon, et la puissance P' réagissant tangentiellement à la circonférence décrite par son point d'application. Cette machine revient donc au tour; en sorte *que* (pag. 147) *la puissance est à la résistance, comme le rayon du pignon est au rayon de la manivelle.* Comme dans le n°. 3, l'action de la puissance se transmet au point de contact de l'aile du second pignon et de la dent de la barre, par l'intermédiaire de deux roues et de deux pignons, en regardant le cercle que décrit la manivelle, comme une roue portant un pignon, on a cette condition d'équilibre : *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons, est à celui de la roue dentée par le rayon de la manivelle.*

De la Vis.

Nous donnerons de cette machine deux générations dont chacune nous fournira la relation qui doit exister, pour l'équilibre, entre la puissance et la résistance.

Première génération. Considérons d'abord un cylindre droit, à base circulaire n°. 3 (pl. 10), base dont le diamètre soit BB', et développons sa surface sur un plan, n°. 6 (pl. 9); ce développement sera le rectangle $BEMC$ dont la base BE est égale en longueur à la circonférence du cercle qui sert de base au cylindre. Divisons les côtés égaux et parallèles BC, EM en parties égales BR, RQ, Fig 120.

QS.... *EG*, *GH*, *HI*...., et menons les droites *BG*, *RH*, *QI*.... qui seront parallèles. Si l'on replie le rectangle *BEMC* sur la surface du cylindre, de manière que sa base *BE* forme la circonférence dont *BB′*, n°. 3 (pl. 10), est le diamètre, la droite *BG* se repliera suivant la courbe *BbR*, la droite *RH* suivant la courbe *RrQ*, et ainsi de suite, et toutes ces courbes contiguës en *R*, *Q*, etc., formeront sur la surface cylindrique une courbe continue *BbRrQq*.... qu'on nomme *spire* ou *hélice*.

Il résulte de cette génération de la courbe, que les intervalles comptés sur une arête du cylindre entre les points *p* et *p′*, *p′* et *p″* etc. de l'hélice n°. 3, sont toujours égaux. Cette distance constante entre deux intersections de l'hélice par la même arête, se nomme *pas de l'hélice*.

Si l'on conçoit qu'un triangle isocèle *RBK*, n°.3, dont le côté *BR* est la hauteur du pas de l'hélice, tourne autour de l'axe vertical du cylindre, de manière que les points *B* et *R* soient constamment sur l'hélice qui servira de directrice, en sorte que le point *B* parcourant *BbR*, le point *R* se meuve suivant *RrQ*, le plan de ce triangle passant toujours par l'axe, engendrera sur la surface cylindrique un filet saillant, n°. 5 (pl. 10) : tous les points de ce plan décriront des hélices qui seront autant d'élémens linéaires du filet, hélices qu'on pourra considérer comme décrites sur des cylindres de même axe, mais de rayons différens. Toutes ces hélices ont le même pas qu'on nomme *pas de vis*.

Si le filet est engendré par un parallélogramme, il est dit *filet carré*, n°. 4.

L'écrou est une pièce de bois ou de métal, creusée intérieurement pour donner passage à la vis ; cet écrou est le moule de la vis, c'est-à-dire qu'il est en creux ce que celle-ci est en relief. Si l'axe de la vis est

vertical, et qu'on tourne l'écrou horisontalement au moyen d'une barre qui fait corps avec lui, cet écrou s'enfoncera, ou il descendra à chaque tour d'une quantité égale à la hauteur du pas de vis. L'écrou est mobile et la vis est fixe, lorsque l'écrou est chargé d'un poids, ou lorsqu'il comprime un corps, n°. 7 (pl. 9), ou *vice versâ*, lorsque la vis doit presser, comme on le voit, n°. 8 (pl. 10), et alors la puissance agit à l'extrémité d'une barre qui traverse la tête de la vis.

Seconde génération. Soient, n°. 1 (pl. 10), les deux cercles concentriques $COC'Q$, $BO'B'Q'$ représentant le plan ou la projection horisontale de la vis ; imaginons qu'un des points du cercle extérieur, le point C, par exemple, se meuve sur la surface cylindrique à laquelle ce cercle sert de base, de manière que si, lorsqu'il est revenu perpendiculairement au-dessus de sa première position C, la hauteur perpendiculaire à laquelle il s'est élevé est h, on ait $\frac{h}{n}$ pour la hauteur à laquelle il se trouve, lorsque sa projection horisontale aura parcouru la n^{eme}. partie de la circonférence $COC'Q$. La courbe que décrit ainsi le point C sur la surface cylindrique, se nomme *une hélice*, qu'on voit n°. 2.

Prenons ensuite sur le cercle intérieur $BO'B'Q'$, un point dont la distance à un des points de l'hélice précédente, mesurée parallèlement à l'axe de la surface cylindrique, et dans un plan passant par cet axe, c'est-à-dire, sur l'arête correspondante de la surface cylindrique qui a pour base $BO'B'Q'$, soit égale à $\frac{1}{2}h$; ce point sera B' ; faisons décrire à ce point une hélice, n°. 3, telle aussi qu'après une révolution du point générateur B', ce point soit élevé de la quantité h au-dessus de sa position de départ. Il est évident que les

deux points C et B' continueront ainsi à décrire des hélices, chacun sur la surface cylindrique à laquelle il appartient : la distance d'un point quelconque d'une de ces courbes, au point correspondant de l'autre, mesurée parallèlement à l'axe, sera toujours $= \frac{1}{2} h$.

Le cylindre qui a pour base le cercle intérieur, forme ce qu'on appelle *le corps de la vis*. La surface courbe qui joint les hélices du corps de la vis avec les hélices extérieures, est telle que ses élémens pris dans la coupe par l'axe, sont des lignes droites qui, dans le n°. 5, forment les parties triangulaires qu'on voit saillantes : le solide renfermé entre cette surface et le corps de la vis, pris dans l'espace d'une révolution entière, s'appelle *filet de la vis* : ainsi, les parties visibles n°. 5, représentent des demi-filets : la distance, h, ou le chemin que fait le point générateur parallèlement à l'axe pendant une révolution, s'appelle *pas de la vis*, ou *hauteur du pas de la vis*.

Le n°. 4 représente *une vis à filets quarrés* : sa génération doit se comprendre aisément après ce que nous venons de dire : le profil de la saillie des filets est un parallélogramme, et la hauteur du pas de la vis est égale à l'épaisseur des filets, plus le vide entre un filet et le suivant ; car c'est le chemin que fait parallèlement à l'axe, le point générateur pendant une révolution entière.

PROBLÈME. *Trouver le rapport entre une puissance et une résistance en équilibre au moyen de la vis, en partant de la première génération.*

Dans le cas de l'écrou mobile, on pourra considérer le poids de l'écrou et de la charge qui repose sur

la tête de cet écrou, comme composé d'autant de petits poids p, p', p''.... qu'il y a de points de contact entre la vis et l'écrou, et chacun de ces petits poids comme retenu séparément en équilibre sur la portion de la surface de la vis en contact, par de petites forces horisontales f, f', f''.... qui leur seraient immédiatement appliquées. Puisque, dans le développement du cylindre, une hélice quelconque est une suite de lignes droites parallèles, il est clair que la propriété caractéristique de cette hélice, est d'être partout également inclinée dans le même sens, aux génératrices successives qu'elle coupe sur la surface du cylindre ; donc, l'axe du cylindre étant vertical, cette hélice est partout également inclinée à l'horison, et un poids p situé en m sur cette hélice, lequel peut être considéré comme situé sur la tangente à l'hélice en ce point, est dans le même cas que s'il reposait en m' sur un plan incliné, n°. 6 (pl. 9), dont la base est RG et la hauteur est GH, c'est-à-dire, le pas de vis.

Si donc on suppose que le point m' soit pressé sur l'hélice par une force verticale p, et soit retenu en même tems par une force horisontale f, laquelle agit tangentiellement à la surface du cylindre, sur laquelle l'hélice est tracée, on aura entre p et f, cette relation pour l'équilibre (pag. 125 et 126)

$$f : p :: GH : RG :: h : 2\pi r \ldots. (a),$$

en nommant h la hauteur du pas de vis, r le rayon du cylindre, et π le rapport de la circonférence au diamètre.

Imaginons par le point m, n°. 3 (pl. 10), l'horisontale mo qui rencontre en o l'axe vertical et fixe du cylindre ; à la force horisontale f et tangentielle au cylindre, appliquée en m, on peut substituer une autre force

horisontale et parallèle q appliquée à une distance de o sur la ligne om suffisamment prolongée, égale à la distance à l'axe du même cylindre, du point d'application de la force P' qui agit perpendiculairement à l'extrémité de la barre horisontale dont la direction passe par l'axe. Cette force q sera capable du même effet que f, si on établit entre q et f la relation

$$q : f :: r : R \ldots (b),$$

R représentant la distance du point d'application de q ou de P' à l'axe du cylindre. Si l'on multiplie par ordre les proportions (a) et (b), on aura

$$q : p :: h : 2\pi R \ldots (1).$$

Or r, qui est le rayon du cylindre sur lequel est tracée l'hélice, n'entrant plus dans cette proportion, on aura toujours le même rapport entre la puissance q et la force p, quel que soit le cylindre. Si on suppose aussi les forces f', f'', etc., qui font équilibre au poids p', p''..... remplacées par d'autres forces horisontales q', q''..... qui agissent toutes ainsi que la force q à la distance R de l'axe fixe, on aura ces relations particulières d'équilibre

$$q' : p' :: h : 2\pi R \ldots (2)$$
$$q'' : p'' :: h : 2\pi R \ldots (3)$$
$$q''' : p''' :: h : 2\pi R \ldots (4)$$
etc.

de ces proportions (1), (2), (3), (4), etc., on déduit

$$q + q' + q'' + q''' + \text{etc.} : p + p' + p'' + p''' :: h : 2\pi R \ (*),$$

(*) Ici nous avons composé, par voie de somme, les forces q, q', q''...., ce qu'il n'est permis de faire qu'à l'égard des forces parallèles, ou qui agissent tangentiellement à une circonférence (pag. 114, 115); or, c'est à ce dernier cas qu'on peut les ramener. En effet, qu'on

or, la somme des puissances partielles q, q', q'', etc., est la puissance P' qui retient en équilibre la somme des poids $p + p' + p'' \ldots = P$, c'est-à-dire, le poids de l'écrou et de la charge qu'il supporte. On a donc, pour l'équilibre,

$$P' : P :: h : 2\pi R,$$

---

imagine une coupe de la vis par un plan mené entre les surfaces supérieure et inférieure de l'écrou, et parallèlement à ces surfaces : ce plan coupera la surface en contact du filet de vis, en un certain nombre de points chargés de petits poids élémentaires p, p', p''... tenus en équilibre par les puissances q, q', q''... lesquelles agiront dans un même plan, tangentiellement à une même circonférence décrite du rayon R, et qui ne peut que tourner autour de son centre : et comme ces puissances et les poids devront former avec h et $2\pi R$ autant de proportions telles que (1), (2), (3)... qu'il y a de points dans la section de la surface du filet par le plan coupant, on pourra composer, par voie de somme, les puissances et les poids qui sont des forces parallèles, et on aura

$$Q' : \Pi' :: h : 2\pi R.$$

On obtiendrait de même, pour chacune des sections horisontales, des proportions analogues

$$Q'' : \Pi'' :: h : 2\pi R$$
$$Q''' : \Pi''' :: h : 2\pi R,$$
etc.

Mais les points d'application de ces puissances ou de ces résultantes Q', Q'', Q'''... sur les circonférences du rayon R, qui sont dans des plans différens, mais parallèles, pouvant être pris à volonté (Théor. 34), on les supposera tous sur une même verticale, et alors ces puissances Q', Q'', Q'''... étant parallèles et dans un même plan, on pourra de nouveau les composer par voie de somme, en sorte que des proportions précédentes on déduira celles-ci

$$Q' + Q'' + Q''' \ldots : \Pi + \Pi'' + \Pi''' \ldots :: h : 2\pi R,$$

c'est-à-dire

$$P' : P :: h : 2\pi R.$$

Donc, pour l'équilibre de la vis, la puissance qui tend à faire tourner l'écrou, est à la résistance qui le presse dans le sens de l'axe, comme la hauteur du pas de vis, est à la circonférence que tend à décrire la puissance.

La puisssance a donc d'autant plus d'avantage sur la résistance, que cette puissance agit à une plus grande distance de l'axe, et que le pas de la vis est plus petit : ainsi, en supposant le pas d'une ligne, et la distance de la puissance à l'axe d'un pied, la puissance, abstraction faite du frottement, ne serait que la 905e. partie de la résistance.

On verra bientôt comment, de la seconde génération, on peut déduire la relation d'équilibre entre une puissance et une résistance, au moyen de la vis.

De la Vis sans fin.

On emploie quelquefois la vis sans écrou, au moyen d'un mécanisme qui, dans les diverses modifications
Fig. 121. qu'on peut lui faire subir, revient toujours au fonds à celui de la figure 121. Les filets d'une vis immobile dans le sens de son axe, mais qui a la liberté de tourner perpendiculairement à cet axe, s'engrènent dans les dents d'une roue placée au-dessous, et qui ne peut avoir d'autre mouvement que celui de rotation autour de son centre. Cette roue porte un pignon propre à faire mouvoir une autre roue, ou un cylindre autour duquel s'enroule une corde à laquelle est suspendu le poids à tenir en équilibre.

La vis ainsi employée, s'appelle *vis sans fin*, ou *vis d'Archimède*; les dents de la roue doivent être espacées relative-

ment à la hauteur du pas de vis, de manière à s'engrener avec justesse dans les filets, et les faces de ces dents qui se trouvent dans le sens de l'épaisseur de la roue, doivent être inclinées pour être à-peu-près parallèles à l'arc d'hélice avec lequel elles se trouvent en contact lors de l'engrenage.

Dans quelques instrumens de mathématiques, d'astronomie ou de physique, on a de pareilles vis destinées à faire faire de très-petits mouvemens à des cercles ou à des secteurs de cercle ; on les nomme alors *vis tangentes*.

On se sert encore très-souvent de la vis comme *micromètre*, ou instrument propre à évaluer de très-petites mesures. La tête de la vis porte un *index* dont l'extré- Fig. 122. mité décrit un cercle pendant que la vis fait une révolution : le cercle est divisé en parties égales, et chacune de ces parties indique une partie proportionnelle de la hauteur du pas de la vis : ainsi cette hauteur étant $= \frac{1}{4}$ de ligne, et le cercle étant divisé en 25 parties égales, lorsque l'index aura parcouru une division, l'écrou et les corps qui lui sont attachés, auront marché de $\frac{1}{100}$ de ligne, longueur qui sera ainsi rendue sensible, et qu'autrement on ne pourrait évaluer directement. La vis s'emploie aussi pour faire avec justesse, mais sans les mesurer, des mouvemens qu'on ferait trop forts ou trop faibles, en appliquant immédiatement la main sur le corps à mouvoir.

PROBLÈME. *Trouver le rapport entre une puissance et une résistance en équilibre au moyen de la vis sans fin.*

P' représentant toujours la puissance appliquée à la Fig. 121. manivelle qui met la vis en jeu, h le pas de la vis, R la longueur du bras de levier à l'extrémité duquel

agit perpendiculairement la puissance P', r le rayon de la roue, r' celui du pignon ou du cylindre qui y est adapté, et P la résistance, l'effort produit à l'extrémité du rayon de la roue et au point en contact, sera $\frac{2\pi RP'}{h}$ (pag. 173) : considérant cet effort comme une puissance appliquée à l'extrémité de r, et faisant équilibre au poids P, on aura (pag. 162)

$$\frac{2\pi rRP'}{h} = Pr', \quad \text{d'où} \quad P' : P :: r'h : 2\pi rR.$$

Ainsi, *la puissance est à la résistance, comme le produit du pas de la vis par le rayon du pignon, est au produit de la circonférence qui a pour rayon la distance du point d'application de la puissance à l'axe de la vis, par le rayon de la roue.*

En supposant un plus grand nombre de roues et de pignons, on trouverait fort aisément *que la puissance serait à l'effort produit à l'extrémité du rayon du dernier pignon, comme le produit du pas de vis par celui des rayons de tous les pignons, est au produit de la circonférence que la puissance tend à décrire autour de l'axe de la vis, par celui des rayons de toutes les roues.*

Du Coin.

Fig. 123. Le *coin* est un prisme triangulaire dont une des faces, qu'on appelle *la tête du coin*, est ordinairement plus étroite que chacune des autres : deux de celles-ci $MNRQ$, $PORQ$ forment, par leur rencontre, une arête QR qui est le *tranchant du coin*; c'est par cette arête que le coin pénètre dans les corps qu'on veut diviser.

On voit cette machine employée à une infinité d'ouvrages, sous une infinité de formes différentes. Les outils tranchans et instrumens pointus, tels que *le coin à fendre du bois*, les *couteaux*, *haches*, *cloux*, *pieux*, *pilotis*, *etc.*, se rapportent à cette machine.

La théorie du coin considérée relativement à la nature des corps qu'il a à diviser, tient à des connaissances de physique assez imparfaites; savoir : la force d'adhésion des différentes matières, etc., etc. : il est indispensable, dans chaque cas, de faire des expériences propres à révéler la loi particulière de résistance des différens corps qu'on veut diviser.

La direction de la percussion ou du choc sur la tête *MNOP* du coin, doit être perpendiculaire à cette face *MNOP* : car si elle était oblique, on pourrait décomposer cette action en deux autres, l'une perpendiculaire à *MNOP* qui aurait la plénitude de son effet, l'autre suivant la face, qui serait perdue. Le choc normal ou perpendiculaire à la tête du coin, ne peut se faire sentir que dans les points de contact des faces *PR*, *MR* du coin avec les parois intérieures du corps qu'il divise.

PROBLÈME. *Assigner, dans le cas d'équilibre, le rapport entre l'effort normal à la tête du coin, et les résistances qu'il éprouve perpendiculairement à ses faces en contact.*

Soit un coin en contact par chacune de ses faces avec celles du corps qu'il tend à diviser, et qui oppose à cet effort une résistance sur la cause de laquelle nous ne ferons aucune hypothèse particulière; nous supposerons, pour plus de facilité, le coin divisé par un plan passant Fig. 124.

par la direction de la force P' normale à la tête, et de plus perpendiculaire aux arêtes MN, PO. Soit ABC la coupe du coin : si par les points de contact c, c', on mène les perpendiculaires cK, $c'K'$, aux côtés AB, AC du coin, ces perpendiculaires représenteront les directions des efforts qu'opposent à l'action du coin, les parties du corps Q à diviser. Si l'on désigne ces résistances par r et r', et qu'on prolonge Kc, $K'c'$ jusqu'en I, et que de I on mène la perpendiculaire ID sur CB, on aura cette suite de rapports

$$P' : r : r' :: \sin KIK' : \sin K'ID : \sin KID :$$

mais parce que les angles CAB, ACB, ABC sont supplémens de KIK', $K'ID$, KID, on aura

$$P' : r : r' :: \sin CAB : \sin ACB : \sin ABC :: CB : AB : AC,$$

d'où l'on tire

$$P' : r + r' :: CB : AB + AC.$$

On conclut de là que la puissance est à la somme des résistances, comme la base du triangle est à la somme des deux autres côtés.

Voyez *l'Architecture hydraulique de M. Prony, membre de l'Institut national.*

THÉORÈME XXXVII. *Deux forces non situées dans le même plan, ne peuvent avoir une résultante.*

Cette proposition a déja été démontrée (*pag.* 64), mais en supposant un point et un axe fixes; nous allons dégager la démonstration de ces hypothèses.

Il est clair que si les deux forces en question admettent une résultante, elle ne peut agir que sur l'un des points

de la droite qui joint les points d'application des deux composantes.

1°. La résultante R de P' et P'', ne peut être dans le plan qui contient l'une des forces et la droite qui joint les points d'application A et B; car si l'on suppose la résultante R dans le plan de P' et de AB, la force R' égale et directement opposée à R, composée avec P', devra donner une résultante R'' qui soit détruite par P'', ce qui est impossible, puisque ces deux forces ne sont pas dans un même plan. Fig. 125.

2°. La résultante R ne peut être dans un plan quelconque $MNKI$ mené par AB, et que nous supposerons au-dessus du plan de la planche qui contient P' et AB, en sorte que P'' soit entre ce dernier plan et $MNKI$. Car soient AR' et AR'' les intersections des plans ABP', $MNKI$ par un plan transversal mené par P'' : décomposons P'' en deux forces suivant AR' et AR'', la résultante R supposée de P' et P'' sera celle de R'', R' et P'. Si l'on compose R' et P', forces situées dans un même plan qui est celui de la planche, et si R''' est leur résultante, la force R sera celle de R''' et R'' ; mais ces deux dernières forces ne sont pas dans un même plan; d'ailleurs R est dans le plan de R'' et de AB. Donc la résultante de deux forces appliquées aux deux extrémités d'une droite, serait dans le plan de l'une de ces forces et du levier, ce qui est contre la première partie de la démonstration. Fig. 126.

3°. Supposons le plan $MNKI$ de la résultante, au-dessous du plan de la planche, et la force P'' au-dessus ; alors les intersections du plan mené par P'' avec le plan de la planche, qui contient toujours P' et AB, et le prolongement de $MNKI$ au-dessus de ce dernier plan, seront AR' et Ar'', en sorte que la force P'' restant toujours entre AR' et Ar'', pourra être décomposée suivant ces

directions : la résultante de R' et P' sera toujours R''' dans le plan $P'AB$, et R devra être celle de R''' et r'' : ainsi R serait toujours dans le plan de l'une des composantes r'' et du bras de levier, ce qui est impossible.

4°. On peut encore supposer le plan de la résultante au-dessus du plan de la planche, mais entre ce plan et la direction de la force P''. Alors, en menant par P'' un plan transversal, il faudra prendre l'intersection de ce plan avec le prolongement de celui de la planche ou de $P'AB$, et celle du même plan avec celui de la résultante, afin que la direction de P'' reste toujours entre celles des lignes suivant lesquelles doivent être dirigées les composantes de P''.

Coroll. Ainsi, l'équilibre entre deux forces, au moyen d'un machine qui n'offre qu'un point ou un axe fixe, ne peut s'établir, à moins que les deux forces ne soient dans un même plan, ou qu'elles ne puissent être remplacées par deux forces situées dans un même plan.

CHAPITRE VIII.

Détermination de l'Equilibre des Machines simples, par le principe des vîtesses virtuelles.

Je dois à l'amitié de l'auteur de *l'Histoire des Mathématiques*, M. *Charles Bossut*, *Membre de l'Institut*, l'écrit suivant qu'il a bien voulu me permettre de consigner ici.

Le principe des vîtesses virtuelles dont quelques auteurs prétendent que le germe se trouve dans les écrits de *Galilée*, n'a commencé à être employé avec succès, que depuis la notion claire et distincte que *Jean Bernoulli* en a donnée dans une lettre écrite en 1717 à *Varignon*, et rapportée par ce dernier dans sa Mécanique (tom. II, sect. IX, pag. 174). *Varignon* présente ce principe comme un corollaire de celui de la composition et décomposition des forces; de sorte qu'ayant établi l'équilibre des machines simples par le second moyen, il conclut ensuite que le principe des vîtesses virtuelles a également lieu dans chaque cas particulier d'équilibre : il est entré à ce sujet dans plusieurs détails qui sont néanmoins incomplets et insuffisans à certains égards.

M. *Lagrange* dans son *Traité de Mécanique analytique*, publié en 1787, et dont il prépare une nouvelle édition, considère le principe des vîtesses virtuelles comme une loi primordiale de la mécanique, et il en fait la base de formules générales, d'où résulte la solution de tous les problêmes de Statique ou de l'équilibre

des forces. Ce même principe combiné avec celui de *Jacques Bernoulli* et de *d'Alembert*, donne aussi la solution de tous les problêmes de la communication des mouvemens, puisque *d'Alembert* a fait voir en général que la solution de ces derniers problêmes, était toujours réductible à celle des problêmes de l'équilibre. M. *Lagrange* a traité cette matière avec sa supériorité ordinaire; mais il n'a pas fait directement l'application du principe des vîtesses virtuelles à l'équilibre des machines: cette application est l'objet que je me propose ici, sans employer d'autres secours que la simple géométrie élementaire.

NOTIONS GÉNÉRALES ET PRÉLIMINAIRES.

(1) Si l'état d'un système de forces en équilibre, vient à être dérangé infiniment peu, ou qu'on donne à ce système un petit mouvement en conséquence duquel le point d'application de chaque force parcourre un espace infiniment petit, la force demeurant toujours parallèle à elle-même, ou se détournant infiniment peu de cette direction par un petit mouvement circulaire autour du point proposé, l'espace parcouru par ce même point, est ce qu'on appelle la *vitesse virtuelle* de la force, et le produit de la force par sa vîtesse virtuelle, est *l'énergie* ou le *momentum* de la force.

Par exemple, soit A le point d'application d'une force Fig. 127. qui agit dans le sens FA ou dans le sens AF : qu'on imprime à ce point un petit mouvement qui lui fasse parcourir l'espace infiniment petit Aa, de manière que la droite FA soit transportée en fa, en demeurant parallèle à elle-même, ou en se détournant infiniment peu de sa première direction par un petit mouvement

circulaire autour du point A ; qu'on mène ensuite du point A la perpendiculaire AB sur FA ; alors Ba ou aB sera la vitesse virtuelle de la force F, et $F \times Ba$ *son énergie* ou *son momentum* : je n'ai pas besoin d'ajouter que si l'on mène du point a la perpendiculaire ab sur FA, on peut prendre indifféremment Ba ou Ab pour la *vitesse virtuelle*, et $F \times Ab$ pour l'énergie.

(2) Il y a nécessairement dans tout système de force en équilibre, des énergies positives et des énergies négatives, lesquelles par leurs oppositions réciproques, se détruisent et forment l'état d'équilibre. On les distingue les unes des autres par cette considération que si la force agit dans le sens FA, la vitesse et l'énergie seront positives, lorsque l'angle FAa sera obtus, et négatives lorsque l'angle FAa sera aigu : le contraire aura lieu si la force agit dans le sens AF (*).

PRINCIPE GÉNÉRAL.

Dans tout système de forces en équilibre, de quelque manière qu'on imagine que l'équilibre soit troublé, la somme des énergies positives, est toujours égale à la somme des énergies négatives prises affirmativement ; ou, en d'autres

(*) On pourra donner le signe + à celles des projections des vitesses virtuelles, qui tombent sur les directions des forces, et le signe — à celles qui tombent sur les prolongemens de ces directions, ou réciproquement : en d'autres termes, on prendra avec le même signe celles des vitesses virtuelles projetées sur les directions des forces, qui ont lieu dans le sens de l'action de ces forces, et avec un même autre signe, celles qui ont lieu en sens contraire de ces actions. Il est bien entendu que ces projections se comptent à partir des points primitifs d'application des forces. (*Note de J.-G. G.*)

termes, la somme des énergies positives et négatives prises avec leurs signes naturels, est égale à zéro.

OBSERVATION.

Si la ligne arbitraire suivant laquelle on imagine que l'équilibre se rompt, est supposée perpendiculaire à la direction de l'une des forces, la vîtesse virtuelle et l'énergie de cette force deviendront nulles, et par conséquent n'entreront point dans l'équation que donne le principe général; cependant, comme cette même force contribue pour sa part à l'équilibre qui doit avoir lieu dans tous les sens, on déterminera le rapport qu'elle a avec les autres forces, en donnant une autre direction à la ligne de rupture d'équilibre; ce qui produira une autre équation qui, combinée avec la première, remplira l'objet qu'on desire. Tout cela va s'éclaircir par les applications du principe général aux sept machines simples : *la machine funiculaire*, *le levier*, *la poulie*, *le tour*, *le plan incliné*, *la vis* et *le coin*.

J'avertis une fois pour toutes que je prendrai toujours l'unité pour le rayon ou pour le sinus de l'angle droit.

Machine funiculaire.

PROBLÈME. *Déterminer les conditions de l'équilibre dans la machine funiculaire.*

I.

Fig. 128. Soit un nœud fixe A d'où partent trois cordons AP, AQ, AR, tirés par trois forces Q, R, P qui se font équilibre et qui agissent de A vers P, Q et R : la puissance P sera, si l'on veut, un poids. Je suppose que

l'équilibre se rompe suivant la ligne VAZ, en sorte que le point A décrive l'espace infiniment petit Aa, et que les forces soient transportées parallèlement à elles-mêmes en a. De ce point a, je mène sur AQ, AR, AP, ou sur leurs prolongemens, les perpendiculaires aq, ar, ap, ce qui donne Aq, Ar, Ap pour les vîtesses virtuelles des forces, et $Q \times Aq$, $R \times Ar$, $P \times Ap$ pour leurs énergies. De plus, la vîtesse virtuelle Ap de la puissance P, étant positive, les vîtesses virtuelles Aq et Ar de Q et R seront négatives ; en sorte que l'énergie $P \times Ap$ sera positive, tandis que les énergies $Q \times Aq$, $R \times Ar$ seront négatives. Ainsi on a par le principe général, ou d'après la note,

$$P \times Ap = Q \times Aq + R \times Ar.$$

Je prolonge indéfiniment PA vers T, et je fais l'angle $TAQ = p$, l'angle $RAQ = q$, l'angle $VAQ = x$: l'équation précédente se traduira donc ainsi

$$P \cos (x - p) = Q \cos x + R \cos (q - x) \ldots . (A),$$

relation générale entre les trois forces P, Q, R, quel que soit l'angle x.

Maintenant, si l'on veut comparer les puissances deux à deux, on supposera que VAZ devienne successivement perpendiculaire aux directions des puissances Q, P, R, ce qui donnera, dans le premier cas, $x = 90°$; dans le second, $x - p = 90°$; dans le troisième, $q - x = 90°$: par conséquent l'équation générale (A) produira les trois suivantes

$$\begin{aligned} P \sin p &= R \sin q \\ R \sin (q - p) &= Q \sin p \\ P \sin (q - p) &= Q \sin q, \end{aligned}$$

qui n'en forment néanmoins que deux ; car en mettant dans la seconde pour R sa valeur $\frac{P \sin p}{\sin q}$ donnée par la première, on obtient immédiatement la troisième.

On voit par là que, connaissant les directions des trois puissances, et la quantité de l'une d'elles, on trouvera les quantités des deux autres, et en général, que connaissant quatre des six choses, savoir les quantités et les directions des forces, on connaîtra les deux autres.

Ces mêmes équations donnent les proportions

$$P : R :: \sin q : \sin p$$
$$Q : R :: \sin (q - p) : \sin p,$$

dans lesquelles règne le même rapport : on aura donc cette suite de rapports égaux

$$P : R : Q :: \sin q : \sin p : \sin (q - p)$$
$$:: \sin RAQ : \sin TAQ \text{ ou } \sin QAP : \sin RAT \text{ ou } \sin RAP.$$

Fig. 129. *Remarque* I. Si les puissances Q et R étaient des poids dont les cordes allassent passer sur les poulies fixes K et H, alors tout restant le même, les petites perpendiculaires aq, ar seraient de petits arcs de cercle décrits des centres K et H, et on trouverait les mêmes résultats que ci-dessus.

Remarque II. Nous avons supposé que le nœud A était fixe : s'il était coulant, la direction de la puissance P diviserait l'angle QAR en deux parties égales, et on aurait

$$P : R \text{ ou } Q :: \sin QAR : \sin \tfrac{1}{2} QAR.$$

II.

Fig. 130. Soit une machine funiculaire qui assemble à un même

nœud fixe A, quatre cordons tirés par quatre puissances Q, R, S, P qui se font équilibre : je suppose que l'équilibre se rompe suivant la direction VAZ, en sorte que le point A parcoure la ligne infiniment petite Aa, les puissances demeurant toujours parallèles à elles-mêmes. Du point a, je mène les perpendiculaires aq, ar, as, ap sur leurs directions : on aura pour l'équation d'équilibre

$$P \times Ap = Q \times Aq + R \times Ar + S \times As,$$

ou en nommant respectivement p, q, r, x les angles QAT, QAR, QAS, QAV,

$$P\cos(x-p) = Q\cos x + R\cos(q-x) + S\cos(r-x) \ldots (B).$$

Supposons que la ligne de rupture VAZ devienne successivement perpendiculaire aux directions AQ, AR, AS, AP des quatre puissances : on aura successivement $x = 90°$, $q - x = 90°$, $r - x = 90°$, $x - p = 90°$: ainsi l'équation fondamentale (B) donnera par les formules de la trigonométrie, les quatre équations suivantes

$$\begin{aligned}
P\sin p &= R\sin q + S\sin r \\
Q\sin q &= S\sin(r-q) + P\sin(q-p) \\
P\sin(r-p) &= Q\sin r + R\sin(r-q) \\
Q\sin p &= R\sin(q-p) + S\sin(r-p),
\end{aligned}$$

lesquelles se réduisent à deux seulement ; en sorte qu'étant données les directions des quatre forces, il faut se donner encore les quantités de deux d'entre elles, pour parvenir à la connaissance des deux autres, comme on va le voir par le calcul suivant.

Je suppose, pour abréger un peu, $\sin p = a$, $\sin q = b$, $\sin r = c$, $\sin(q-p) = f$, $\sin(r-p) = q$, ...

sin $(r-q)=h$; les quatre équations précédentes deviendront

$$Pa=Rb+Sc.$$
$$Qb=Sh+Pf$$
$$Pq=Qc+Rh$$
$$Qa=Rf+Sq$$

Eliminons l'une quelconque de ces quatre forces, par exemple, P: les trois premières équations donneront

$$P=\frac{Rb+Sc}{a},\quad P=\frac{Qb-Sh}{f},\quad P=\frac{Qc+Rh}{q},$$

d'où résultent les deux relations

$$Rbf+Scf=Qab-Sah$$
$$Rbq+Scq=Qac+Rah,$$

à quoi joignant la dernière équation

$$Qa=Rf+Sq,$$

on a, en apparence, trois équations entre les trois inconnues Q, R, S; mais ces trois équations se réduisent à deux. En effet, si au moyen de ces trois équations nous éliminons l'une des trois inconnues, par exemple, Q, nous aurons

$$Q=\frac{Rbf+Scf+Sah}{ab}$$
$$Q=\frac{Rbq+Scq-Rah}{ca}$$
$$Q=\frac{Rf+Sq}{a},$$

ce qui donne les deux équations

$$Rbf + Scf + Sah = Rbf + Sbq, \text{ ou } cf + ah = bq$$
$$Rbq + Scq - Rah = Rcf + Scq, \text{ ou } bq - ah = cf;$$

or, ces deux résultats étant identiques, les trois équations qui les donnent, se réduisent à une, et les quatre se réduisent à deux. Ainsi, outre les quatre directions, on se donnera les deux forces Q et R, par exemple, et on aura S par l'équation

$$S = \frac{Qa - Rf}{q};$$

et P par l'équation

$$P = \frac{Qc + Rh}{q}.$$

III.

Lorsqu'une machine funiculaire est composée de plus d'un nœud, l'équilibre s'établit de proche en proche, comme on va l'indiquer par un exemple fort simple. Fig. 31.

Soit une machine funiculaire à deux nœuds fixes A et B: du premier A partent trois cordons AQ, AR, AP tirés par trois puissances Q, R et P, et du second B partent les quatre cordons BR', BL, BM et BN. Tout le système étant en équilibre, il est d'abord évident que le cordon AB qui forme la communication des deux nœuds A et B, est également tendu dans le sens AB et dans le sens BA, ou que les deux puissances R et R' de directions opposées, sont égales. Imaginons qu'on imprime à tout le système un mouvement par lequel les positions de toutes les puissances changent infiniment peu, en demeurant parallèles à elles-mêmes. Le nœud A étant supposé parcourir le petit espace Aa, le nœud B parcourra la petite ligne Bb égale et parallèle à Aa; les puissances seront transportées pa-

rallèlement à elles-mêmes en a et b, et le cordon AB en ab. Des points a et b soient menées perpendiculairement aux directions des cordons, les droites aq, ar, ap, br', bl, bm, bn. Cela posé, l'équilibre du nœud A donne, d'après le principe,

$$P \times Ap = Q \times Aq + R \times Ar,$$

et l'équilibre du nœud B donne

$$R' \times Br' + N \times Bn = L \times Bl + M \times Bm;$$

or $R' = R$ et $Br' = Ar$: substituant dans la seconde de ces équations à la place de $R' \times Br' = R \times Ar$ sa valeur $P \times Ap - Q \times Aq$ donnée par la première, on aura l'équation générale

$$P \times Ap - Q \times Aq + N \times Bn = L \times Bl + M \times Bm,$$

ou

$$P \times Ap + N \times Bn = Q \times Aq + L \times Bl + M \times Bm,$$

dont on fera le même usage qu'on a fait ci-dessus de l'équation analogue.

Levier.

Problème. *Déterminer les conditions d'équilibre du levier.*

Fig. 152. Soit BOC un levier aux extrémités duquel sont appliquées les forces P et Q qui vont concourir au point A, et qui se font équilibre sur l'appui O, de sorte que la résistance de cet appui fait la fonction d'une troisième force qui agirait de O vers R. Que l'équilibre se rompe suivant la direction VAZ, et que le point A parcoure le petit espace Aa. Je mène du point a les

perpendiculaires aq, ap, ar aux directions des puissances Q, P et R : on aura pour l'équation générale d'équilibre

$$R \times Ar = Q \times Aq + P \times Ap,$$

et en nommant respectivement p, q, x les trois angles QAP, QAO, QAZ, cette équation devient

$$R \cos(x - q) = Q \cos x + P \cos(p - x).$$

Faisons successivement $x = 90°$, $p - x = 90°$,........ $q - x = 90°$, nous trouverons

$$P \sin p = R \sin q$$
$$Q \sin p = R \sin (p - q)$$
$$Q \sin q = P \sin (p - q),$$

équations qui donnent cette suite de rapports égaux

$$Q : P : R :: \sin(p - q) : \sin q : \sin p$$
$$:: \sin PAO : \sin QAO : \sin QAP.$$

Poulie.

PROBLÈME. *Déterminer les conditions de l'équilibre dans la poulie.*

Soit un poids P soutenu par une poulie qu'embrasse une corde tirée par les puissances Q et R : que l'équilibre se rompe suivant la direction ZAV, en sorte que le point A de concours des puissances Q et R, parcoure le petit espace Aa. Du point a, menons aux directions des puissances P, Q et R les perpendiculaires ap, aq, ar : si l'on observe que le point A est celui d'application des forces, et qu'ainsi les vitesses virtuelles Ar, Aq ont lieu dans le sens des forces R et Q, tandis que la vitesse Fig. 153.

virtuelle Ap tombe en sens contraire de l'action de P, on aura (*note*) l'équation d'équilibre

$$P \times Ap = Q \times Aq + R \times Ar,$$

dont on fera le même usage qu'on a fait de l'équation analogue dans les cas précédens.

On voit qu'ici la direction OAP du poids P, partage nécessairement en deux parties égales l'angle QAR, et que, par conséquent, les deux puissances Q et R sont égales.

Tour.

PROBLÈME. *Déterminer les conditions d'équilibre dans le tour.*

Fig. 138. Soient un poids P et une force ou puissance Q, appliqués au cylindre et à la roue d'un tour, et en équilibre : le poids et la puissance sont dans le plan de la roue, hypothèse qui n'influe pas sur l'équilibre (pag. 143). Supposons que l'équilibre se rompe suivant la direction quelconque ZAV, de manière qu'un point A de cette ligne décrive le petit espace Aa. Tous les points du système décriront en même tems de petits espaces égaux et parallèles à Aa. Les puissances P et Q vont concourir au point B, et la résistance du centre C, commun au cylindre et à la roue, peut être regardée comme une force R qui agit dans le sens CBR. Je mène par le point B la droite zBu parallèle à ZAV, et par le point a la droite ab parallèle à AB, ce qui donne Bb égale et parallèle à Aa. Du point b, je mène les perpendiculaires bp, bq, br aux directions des trois puissances P, Q, R. Alors on aura l'équation générale d'équilibre

$$P \times Bp = Q \times Bq + R \times Br,$$

et en nommant respectivement p, q, x, les angles... $Q'BR$, $Q'BP'$, $Q'Bu$,

$$P \cos(x-q) = -Q \cos x + R \cos(x-p) \dots \ (C).$$

Supposons que la ligne de rupture devienne successivement perpendiculaire à la direction de la force R et à celle de la force Q : on aura, dans le premier cas, $x-p=90°$, et par conséquent $\cos(x-p)=0$,.... $\cos x = -\sin p$, $\cos(x-q)=\sin(q-p)$; dans le second, $x=90°$, et par conséquent $\cos x = 0$,...... $\cos(x-p)=\sin p$, $\cos(x-q)=\sin q$. Ainsi, l'équation générale (C) donnera ces deux équations particulières

$$P \sin(q-p) = Q \sin p$$
$$P \sin q = R \sin p,$$

d'où résulte cette suite de rapports égaux

$$P : Q : R :: \sin p : \sin(q-p) : \sin q$$
$$:: \sin QBR' : \sin PBR' : \sin PBQ \ (*).$$

(*) Or dans les triangles BCN, BCM rectangles en N et M, on a, en désignant par R le rayon CN de la roue, et par r le rayon CM du cylindre, les deux proportions

$\sin QBR' : 1 :: R : BC$ $\sin PBR' : 1 :: r : BC$	d'où	$\sin QBR' = \frac{R}{BC}$ $\sin PBR' = \frac{r}{BC}$

et conséquemment

$$P : Q :: \frac{R}{BC} : \frac{r}{BC} :: R : r$$

d'où

$$P \times r = Q \times R.$$

Pour évaluer les pressions sur les points d'appui, il faut rétablir le poids P dans sa véritable position, parce que ces pressions varient avec la position du poids. (*Note de J.-G. G.*)

Plan incliné.

Problème. *Déterminer les conditions d'équilibre sur le plan incliné.*

Soit un corps X dont le poids est P, retenu en équilibre par une puissance Q sur le plan incliné GHI : il
Fig. 135. faut pour cela que la direction du poids P et celle de la puissance Q se rencontrent en un point A tel qu'en menant de ce point une perpendiculaire ABR au plan incliné, cette ligne passe par un des points d'attouchement du corps avec le plan incliné, afin que la résultante du poids et de la puissance, y trouve sa destruction. Cette condition étant supposée remplie ici, j'imagine que l'équilibre se rompe suivant la direction VAZ, et que le point A décrive l'espace infiniment petit Aa. Du point a, je mène les perpendiculaires ap, aq, ar aux directions AP, AQ, AR du poids P, de la puissance Q et de la force R dirigée suivant AR' qui exprime la résistance du plan incliné. On aura l'équation d'équilibre

$$P \times Ap + Q \times Aq = R \times Ar,$$

c'est-à-dire,

$$P \cos (p - x) + Q \cos (q + x) = R \cos x,$$

en nommant p, q, x les angles PAR, QAR, RAZ. Faisons 1°. $x = 90°$, c'est-à-dire, la ligne de rupture d'équilibre perpendiculaire à la direction de la force R, ou parallèle à la longueur GH du plan incliné. L'équation ci-dessus deviendra

$$P \sin p = Q \sin q,$$

qui donne

$$P : Q :: \sin q : \sin p :: \sin QAR : \sin PAR$$
$$:: \cos AOG : \sin HGI.$$

Ainsi, le poids est à la puissance comme le cosinus de l'angle que forme la puissance avec la longueur du plan incliné, est au sinus de l'angle d'inclinaison du plan.

2°. Soit $x + q = 90°$, ou supposons que la ligne de rupture d'équilibre soit perpendiculaire à la puissance Q; l'équation deviendra

$$P \sin (p + q) = R \sin q,$$

ce qui donne la proportion

$$P : R :: \sin q : \sin (p + q) :: \sin QAR : \sin PAQ$$
$$:: \cos AOG : \sin PAQ.$$

Ainsi le poids est à la résistance, comme le cosinus de l'angle que forme la direction de la puissance Q avec la longueur du plan incliné, est au sinus de l'angle que forme cette même direction avec la verticale, ou au cosinus de l'angle qu'elle forme avec l'horisontale.

Ainsi, en réunissant les deux cas, *le poids, la puissance et la résistance du plan incliné, sont trois forces proportionnelles au cosinus de l'angle que forme la direction de la puissance avec la longueur du plan incliné, au sinus de l'angle d'inclinaison du plan, et au cosinus de l'angle que forme la direction de la puissance avec la base du plan incliné, ou la ligne horisontale.*

Vis.

PROBLÈME. *Déterminer les conditions d'équilibre de la vis.*

Fig. 136. Soient une vis verticale et son écrou : l'effet de cette machine est toujours le même, soit qu'elle élève un poids, soit qu'elle comprime un corps. Je suppose donc que la vis soit fixe et que l'écrou soit chargé d'un poids P dont il peut être censé faire partie. Ce poids est soutenu en équilibre sur les filets de la vis par une puissance Q appliquée perpendiculairement et horisontalement à l'extrémité d'une barre liée à l'écrou qu'elle tend à faire tourner autour de l'axe vertical de la vis. Imaginons que, dans un instant, la puissance Q décrive un petit arc c : le poids P montera en conséquence d'une petite hauteur h qu'on peut considérer comme la hauteur d'un petit plan incliné. Or les petits espaces c et h sont les vitesses virtuelles de la puissance et du poids : ainsi on aura

$$Q \times c = P \times h, \text{ d'où } P : Q :: c : h.$$

Donc, en prenant la somme C de tout les petits arcs c, et la somme H de toutes les petites hauteurs correspondantes h, on aura la proportion

$$P : Q :: C : H.$$

Mais C est la circonférence entière du cercle que la puissance décrit horisontalement, tandis que H est la hauteur totale d'un pas de la vis.

Ainsi, pour l'équilibre de la vis, *le poids est à la puissance, comme la circonférence que décrit le point d'ap-*

plication de la puissance, est à la hauteur du pas de la vis (*).

Coin.

PROBLÈME. *Déterminer les conditions de l'équilibre du coin.*

Soit un coin BEC introduit dans la fente d'un corps et qui étant frappé perpendiculairement à la tête BC par un marteau, ou une force F, tend à séparer les deux parties X et Y du corps que je suppose soutenu sur Fig. 187.

(*) Nous déduirons la même conclusion du second mode de génération de la vis, exposée (page 169).

Si, lorsque la puissance et la résistance sont en équilibre, on suppose que la puissance soit un instant prépondérante, son point d'application parcourra dans cet instant un arc infiniment petit de la circonférence qui a R pour rayon, et que nous désignerons par $\frac{1}{\omega}2\pi R$, ω étant un nombre très-grand. Or, d'après la génération de la vis, la résistance parcourra, parallèlement à l'axe de la vis, une portion $\frac{1}{\omega}$ de la hauteur h du pas de la vis, qui sera la quantité dont l'écrou s'élèvera. Ces quantités $\frac{1}{\omega}2\pi R$ et $\frac{1}{\omega}h$ seront les vîtesses virtuelles; la dernière étant dirigée en sens contraire de la résistance, doit être prise négativement. On aura donc, en désignant par P' la puissance appliquée perpendiculairement a l'extrémité de la barre qui fait corps avec l'écrou, et par p le poids de l'écrou et de sa charge,

$$P' \times \frac{1}{\omega}2\pi R - P \times \frac{1}{\omega}h = 0,$$

d'où l'on déduit comme ci-dessus

$$P' : P :: h : 2\pi R.$$

une base fixe HL : les faces de la fente s'appliquent contre celles du coin, et leur opposent des résistances Q et R dont les directions vont concourir au point A avec celle de la force F. Supposons que l'équilibre se rompe de manière que le point A parcoure le petit espace Aa, et du point a menons les perpendiculaires aq, ar, aux directions des forces Q et R : nous aurons l'équation d'équilibre

$$F \times Aa = Q \times Aq + R \times Ar,$$

qui se traite comme les précédentes.

CHAPITRE IX.

Du Frottement et de la Roideur des Cordes.

Avant d'entreprendre la lecture de ce chapitre, il sera bon d'avoir vu dans le suivant, ce qui est relatif à l'équilibre des forces situées dans un même plan, et qui ne concourent pas.

Nous avons déja fait remarquer (page 125) que lorsqu'un corps est placé sur un autre, les parties saillantes de l'une des surfaces en contact, s'engagent dans les pores de l'autre, en sorte que lorsqu'on veut faire glisser l'une de ces surfaces sur l'autre, il faut détruire cet engrenage ou cette résistance qu'on appelle *frottement*, force passive incapable de produire le mouvement, mais qui peut le détruire.

Si une puissance et une résistance sont en équilibre au moyen d'une machine, abstraction faite du frottement, il y aura mouvement si on augmente l'une ou l'autre d'une quantité aussi petite que l'on voudra; mais si l'on admet le frottement, alors, pour qu'il y ait rupture d'équilibre, il faudra augmenter le moteur ou la résistance d'une quantité finie et déterminée. Ainsi, dans le cas d'équilibre, le frottement est avantageux à la puissance, et dans le cas du mouvement, il lui est nuisible.

La résistance du frottement permet donc aux puissances en équilibre de varier jusqu'à un certain point, sans que le mouvement se produise.

Il y a deux espèces de frottement; la première a lieu

lorsqu'un corps ou plutôt lorsqu'une surface glisse sur une autre ; la seconde espèce de frottement a lieu, lorsqu'on fait mouvoir sur un plan une sphère, un cylindre ou une roue, de manière qu'il n'y ait qu'un mouvement de rotation : ce dernier frottement est beaucoup moindre que le premier.

Le frottement qui, dans beaucoup d'occasions, nuit à l'effet des machines, est, dans une infinité de circonstances, d'une grande utilité ; le simple enroulement d'une corde ou d'un cable autour d'un cylindre immobile, produit un frottement capable de résister à un effet qui exigerait, pour être contrebalancé, les efforts réunis de plusieurs puissances.

On a trouvé,

1°. *Que le frottement est d'autant plus considérable, que les surfaces sont moins polies et réciproquement ;* en sorte qu'on peut diminuer le frottement, en polissant davantage les surfaces, ou en bouchant les pores avec des substances telles que les huiles, etc., qui n'augmentent pas l'adhérence des surfaces, autre force qui s'oppose au glissement ;

2°. *Que le tems influe sur l'adhérence des corps, et que la résistance due à cette adhérence, est proportionnelle aux surfaces adhérentes.* M. *Coulomb* a encore remarqué, à l'occasion de l'influence qu'avait la durée du contact sur le frottement, que la difficulté de faire glisser les surfaces l'une sur l'autre, augmentait avec cette durée du contact, mais seulement pendant un tems assez court qu'il a trouvé d'une ou deux minutes, après lesquelles le frottement était parvenu à son *maximum.*

3°. *Que deux surfaces de même nature éprouvent un frottement plus grand que deux surfaces de différentes matières.*

4°. *Que pour un même corps, la résistance du frottement reste la même, quelle que soit celle de ses faces qu'on mette en contact avec une autre surface, pourvu que toutes ses faces soient également polies.* Ce fait peut s'expliquer, en observant que suivant que les points de contact sont plus ou moins nombreux, la pression sur chacun d'eux, laquelle est due au poids constant du corps, est moins ou plus considérable, et que cette pression peut diminuer comme la face en contact augmente.

5°. *Que le frottement est proportionnel à la pression*, c'est-à-dire que la résistance au glissement, est d'autant plus grande, que la force qui presse le corps contre la surface, est elle-même plus considérable.

Pour bien entendre cette proposition qui servira de base à ce qui va suivre, qu'on imagine un corps N reposant par une surface finie qui soit un plan horisontal : le poids du corps sera détruit par la résistance du plan, en sorte que le corps devrait céder à l'action du plus petit moteur, ce qui, cependant, n'arrive pas à cause de la résistance du frottement ; or, si on établit au-delà du plan une poulie de renvoi sur laquelle passe un fil fixé par l'une de ses extrémités au corps, la direction de cette portion du fil, étant horisontale, et qu'à l'autre extrémité on suspende un poids Q propre à vaincre seulement la résistance du frottement ou propre à ébranler le corps, ce poids qui mesure le frottement devra être assez considérable. On a reconnu que si le corps N pèse 2, 3, etc., fois plus, le poids Q doit avoir un poids double, triple, etc., c'est-à-dire, que le frottement est proportionnel au poids du corps ; mais cette loi n'est pas vraie indéfiniment ; car lorsque la pression devient très-considérable, la résistance du frottement diminue loin d'augmenter proportionnellement. Entre certaines limites, on a trouvé que

le poids Q était le tiers ou le quart du poids N; dans tous les cas, le poids Q sera donné par l'expérience. Ainsi, dans cette équation

$$Q = f.N, \quad \text{d'où} \quad f = \frac{Q}{N},$$

le coefficient f peut être regardé comme une quantité connue : sa valeur, pour les substances les plus généralement employées, est donnée dans les Tables de *Brisson*, et dans un Mémoire de M. *Coulomb*, extrait par M. *Prony*, dans son Architecture hydraulique. Le poids Q peut être regardé comme une force qu'on a nommée *force du frottement*, N est la pression, et f le coefficient par lequel on doit multiplier cette pression pour avoir la force du frottement.

Pour faire connaître ce que l'expérience a appris de plus certain sur la mesure du frottement, considérons un corps pesant, posé sur un plan horisontal : ce corps restera en repos, et il exercera sur le plan une pression égale à son poids. Dans cette situation, le frottement n'influe en rien sur l'équilibre : mais supposons que l'on incline le plan donné sur le plan horisontal, et soit α l'angle des deux plans; le poids P se décomposera (pag. 126 et 127) en deux forces, l'une perpendiculaire au plan incliné et égale à $P \cos \alpha$, l'autre dirigée dans le plan incliné, et égale à $P \sin \alpha$: la première exprimera la pression que supporte le plan ; mais il est évident que, sans le frottement, la seconde ferait glisser le corps le long du plan incliné : par conséquent, si le corps continue de rester en repos, il faudra conclure qu'il existe un frottement capable de détruire la force $P \sin \alpha$.

Si l'on continue d'incliner de plus en plus le plan donné sur le plan hórisontal, la force $P \sin \alpha$ augmentera, et au contraire, la pression $P \cos \alpha$ et le frot-

tement du corps diminueront ; car, il n'y a nul doute que le frottement ne diminue avec la pression : la composante du poids P, dirigée dans le plan incliné, finira donc par vaincre le frottement, et par mettre le corps en mouvement : or, si l'on fait croître l'angle α assez lentement pour qu'on puisse saisir avec exactitude l'instant où l'équilibre commence à se rompre, et si l'on désigne par $\mathit{6}$ la valeur correspondante de α, il est clair que la force $P \sin \mathit{6}$ donnera au même instant la mesure du frottement du corps contre le plan incliné. Soit f le rapport de ce frottement à la pression qui est égale à $P \cos \mathit{6}$ à cet instant : on aura

$$f . P \cos \mathit{6} = P \sin \mathit{6}, \text{ d'où } f = \operatorname{tang} \mathit{6} = \frac{H}{B},$$

H étant la hauteur et B la base du plan incliné.

Ainsi, la tangente du plus grand angle pour lequel un corps pesant posé sur un plan incliné, puisse s'y tenir en équilibre, ou, si l'on veut, la tangente du plus petit angle pour lequel il commence à glisser le long de ce plan, exprime le rapport du frottement à la pression que supporte ce plan.

Equilibre du Levier, en ayant égard au frottement.

Soit un levier percé d'un trou cylindrique au travers duquel on fait passer un axe fixe qui est un cylindre d'un diamètre à-peu-près égal à celui du trou, de sorte qu'en tournant autour du cylindre, le levier frotte sur tous les points de sa surface, et il s'agit de déterminer les limites dans lesquelles ce frottement peut empêcher le mouvement de rotation d'avoir lieu, quoique les forces appliquées au levier ne se fassent pas équilibre entre elles. Il est

bien entendu que la section du cylindre par un plan perpendiculaire à son axe, est un cercle.

Nous supposerons que le levier et les forces appliquées à ses deux extrémités, soient dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre fixe, et qui coupe cet axe en un point C. Si la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner le levier dans un sens, est égale à la somme des momens des forces qui tendent à le faire tourner dans le sens opposé, la résultante passe par le point C, elle est perpendiculaire à la surface du cylindre, et l'équilibre a lieu sans que le frottement y contribue (*du levier*). Mais si l'une de ces sommes l'emporte sur l'autre, la résultante ne passe plus par le point C, elle rencontre obliquement la surface du cylindre, et elle se décompose en deux autres forces, l'une perpendiculaire à la surface du cylindre, qui est détruite, l'autre tangente et qui ferait tourner le levier, si elle n'était détruite par le frottement. Désignons par L la différence de ces deux sommes de momens, et imaginons que cette différence augmente de plus en plus jusqu'à ce que l'équilibre soit sur le point de se rompre : à cet instant, les forces données P', P'', P''', etc., sont encore tenues en équilibre par le frottement considéré comme une force tangente au cylindre fixe, et qui tend à faire tourner le levier dans le sens des forces qui ont donné la plus petite somme de momens : or il faut, pour cet équilibre, que le moment de cette force, pris par rapport au point C, soit égal à L, afin que la résultante de cette force, et des forces P', P'', P''', etc., soit perpendiculaire à la surface du cylindre fixe, ce qui exige qu'elle vienne passer par le point C. En désignant donc par F le frottement, et par r le rayon du cylindre fixe, nous aurons (Rem. pag. 38, et chap. X) $L = Fr$. De plus, soit R la

résultante des forces F, P', P'', P'''...., cette force exprimera la pression que supporte le cylindre fixe, perpendiculairement à sa surface, et parce que le frottement est proportionnel à la pression, on aura $F = fR$, f étant un coefficient donné et indépendant des forces P', P'', P''', etc., appliquées au levier. On aura donc ainsi

$$L = frR \ldots . (1);$$

il s'agit donc d'évaluer R. A cet effet, menons dans le plan des forces R, F, P', P'', etc., deux axes rectangulaires, et soient a, a', α', α''..., b, b', β', β''... les angles de ces forces avec chacun des deux axes. Puisque R est la résultante de F, P', P''... on aura (*chap. dernier*)

$$R \cos a = F \cos a' + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.}$$
$$R \cos b = F \cos b' + P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \text{etc.}$$

Si l'on fait pour abréger

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.} = X$$
$$P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \text{etc.} = Y,$$

et qu'on appelle R' la résultante des forces P', P'', P''', etc., on aura

$$R'^2 = X^2 + Y^2,$$

d'où l'on conclut, en employant pour F sa valeur fR,

$$R'^2 = R^2 [(\cos a - f \cos a')^2 + (\cos b - f \cos b')^2];$$

Mais on a

$$\cos^2 a + \cos^2 b = 1; \quad \cos^2 a' + \cos^2 b' = 1;$$

d'ailleurs les directions du frottement et de la pression R, étant perpendiculaires l'une à l'autre, on a aussi

$$\cos a \cos a' + \cos b \cos b' = 0.$$

En vertu de ces équations, la valeur de R'^2 se réduit à

$$R'^2 = R^2(1+f^2), \quad \text{d'où} \quad R = \frac{R'}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Cela posé, si l'on représente par r' la perpendiculaire menée de C sur la direction de R', nous aurons (Rem. pag. 38, et chap. X) $L = R'r'$: substituant cette valeur de L et R dans (1), cette équation devient

$$r' = \frac{fr}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Ce résultat apprend que l'instant où l'équilibre commence à se rompre, dépend uniquement de la distance de la résultante des forces données au point C. Aussi longtems que cette distance est plus petite que $\frac{fr}{\sqrt{1+r^2}}$, les forces données ou leur résultante sont tenues en équilibre par le frottement : aussitôt que la même distance dépasse cette limite, les forces données l'emportent sur le frottement, et l'équilibre est rompu.

La quantité f varie avec la matière du levier et du cylindre fixe, le degré de poli et l'étendue des surfaces frottantes : sa valeur peut être aussi grande que l'on voudra, mais la fraction $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ sera toujours moindre que l'unité ; d'où il suit que quand l'équilibre existe, la distance r' de la résultante R' au point C, est toujours plus petite que le rayon r du cylindre fixe. Ainsi cette force ne peut être tenue en équilibre par le frottement du levier contre le cylindre fixe, qu'autant que sa direction vient couper ce cylindre ; et toutes les fois que cette condition ne sera pas remplie, on pourra assurer que, quel que soit le frottement, l'équilibre est impossible.

Ne considérons qu'une force P' et une résistance P, Fig. 138.
et supposons que la force soit sur le point de vaincre la résistance et le frottement. Désignons par N la force normale en m au boulon ou au cylindre, force qui tiendra lieu de la résistance de ce boulon, par fN la force du frottement tangente en m au même cylindre, force qui agit dans le même sens que la résistance P, par α et θ les angles de P et de N avec la direction de P' ou avec l'axe XX' mené par le centre C parallèlement à cette direction, et enfin par p', p et b les perpendiculaires menées du centre C sur les directions de P', de P et de la force du frottement. En observant que la force P' tend à faire tourner le levier dans un sens, tandis que les forces P et fN tendent à le faire tourner en sens contraire, on aura d'abord cette équation des momens (Rem. pag. 38, et chap. X).

$$P'p' = Pp + b \cdot fN \ldots. (1);$$

mais comme les forces ne concourent pas, nous aurons encore à dire que la somme des composantes des quatre forces suivant chacun des axes rectangulaires, est égale à zéro. Or, lorsqu'on a ramené toutes les forces à agir au point C (Chap. X), il est visible que les composantes suivant XX' de N et fN agissent de C en X', et que celles de P' et P agissent de C en X; 2°. que les composantes suivant YY' de P et fN agissent de C en Y, tandis que celle de N agit de C en Y', la composante de P' suivant le même axe, étant nulle. On a donc ces deux équations

$$P' + P \cos \alpha = N \cos \theta + fN \sin \theta \ldots. (2),$$

$$P \sin \alpha + fN \cos \theta = N \sin \theta \ldots. (3).$$

La somme des carrés des équations (2) et (3), est

$$P'^2 + 2P'P\cos\alpha + P^2 = N^2(1+f^2),$$

si l'on substitue pour N sa valeur $\frac{P'p' - Pp}{bf}$ tirée de la première équation, et qu'on fasse, pour abréger,..... $q^2 = \frac{1+f^2}{f^2} = 1 + \frac{1}{f^2}$, on aura une équation du second degré dont la résolution donne

$$P' = P.\frac{p'pq^2 + b^2\cos\alpha \pm b\sqrt{\{q^2(p'^2 + 2p'p\cos\alpha + p^2) - b^2\sin^2\alpha\}}}{p'^2q^2 - b^2}$$

Dans le cas du parallélisme des forces, $\alpha = 0$, et la formule précédente devient

$$P' = P.\frac{p'pq^2 + b^2 \pm bq(p' + p)}{p'^2q^2 - b^2};$$

or, b étant une quantité fort petite par rapport à p' et à p, les deux équations précédentes deviennent, en négligeant b^2,

$$P' = P\left\{\frac{p}{p'} \pm \frac{b}{p'^2q}\sqrt{p'^2 + 2p'p\cos\alpha + p^2}\right\}\ldots. (a),$$

$$P' = P\left\{\frac{p}{p'} \pm \frac{b}{p'^2q}(p' + p)\right\}\ldots. (b).$$

Le signe supérieur doit être employé dans le cas où la force P' est sur le point de vaincre la résistance et le frottement, et le signe inférieur, dans celui où le frottement est en faveur de P'.

Lorsque $f = 0$, et alors $q = \infty$, on trouve, les forces n'étant pas parallèles,

$$P' = P.\frac{p}{p'}, \quad \text{d'où} \quad P'p' = Pp,$$

et

$$N = \sqrt{\{P'^2 + 2P'P \cos \alpha + P^2\}}.$$

Les formules (a) et (b) trouvent leur application dans l'équilibre de la poulie, lorsqu'on a égard au frottement.

Équilibre du Plan incliné, en ayant égard au frottement.

Nous avons reconnu (pag. 126 et 127) que les conditions d'équilibre d'un corps retenu sur un plan incliné par deux forces P', P'', étaient exactement celles qui auraient lieu si les forces P', P'' étaient immédiatement appliquées sous leurs quantités primitives et sous des directions parallèles, au point où la direction de la résultante perce le plan incliné. Nommant donc α', α'' les inclinaisons des forces sur ce plan, ces inclinaisons étant prises dans le plan des forces, on aura pour les composantes normales de ces forces, $P' \sin \alpha'$, $P'' \sin \alpha''$; leur somme, c'est-à-dire, la pression que nous désignons par N, sera donc (pag. 127)

$$N = P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha''.$$

Supposons que P' soit le poids du corps que nous avons toujours désigné par P, et notons par ε l'angle du plan incliné avec l'horison : on aura $\sin \alpha' = \cos \varepsilon$; conséquemment la pression devient

$$N = P \cos \varepsilon + P' \sin \alpha',$$

en représentant la puissance par P', et remplaçant α'' par α' : ainsi la formule $Q = fN$ (pag. 202) se change dans celle-ci

$$Q = f.N = f(P \cos \varepsilon + P' \sin \alpha'.)$$

Lorsque P' agit horisontalement, auquel cas $\alpha' = \varepsilon$,

$$N = P\cos\iota + P'\sin\iota,$$

et la force du frottement est exprimée par

$$Q = f.N = f(P\cos\iota + P'\sin\iota).$$

Mais lorsqu'un corps pesant P est retenu en équilibre par une force P' d'une direction quelconque, on a cette relation (pag. 128)

$$P'\cos\alpha' = P\sin\iota,$$

et comme la force du frottement favorise la puissance P', dans le cas de l'équilibre, la composante $P'\cos\alpha'$ pourra être diminuée de $f(P\cos\iota + P'\sin\alpha')$, d'où l'on déduira cette relation

$$P'\cos\alpha' - f(P\cos\iota + P'\sin\alpha') = P\sin\iota,$$

qui donne cette condition d'équilibre

$$P' = \frac{P(\sin\iota + f\cos\iota)}{\cos\alpha' - f\sin\alpha'}.$$

Lorsque P' agit horisontalement,

$$P' = \frac{P(\sin\iota + f\cos\iota)}{\cos\iota - f\sin\iota} = \frac{P(\operatorname{tang}\iota + f)}{1 - f\operatorname{tang}\iota}.$$

Si la puissance P' doit vaincre à-la-fois le frottement et la résistance, c'est-à-dire, si elle est prête à produire le mouvement, on a, pour une inclinaison quelconque de la puissance,

$$P' = \frac{P(\sin\iota - f\cos\iota)}{\cos\alpha' + f\sin\alpha'},$$

et lorsqu'elle est horisontale

$$P' = \frac{P(\operatorname{tang}\iota - f)}{1 + f\operatorname{tang}\iota}.$$

De l'équilibre de la Poulie, en ayant égard au frottement.

Si dans les équations (a) et (b) données (pag. 206), on fait $p' = p$, et qu'on néglige b^2, on trouvera

$$P' = P.\left\{1 + \frac{2b}{p'q}\cos\tfrac{1}{2}\alpha\right\};\ P' = P\left\{1 \pm \frac{2b}{p'q}\right\},$$

dont la première convient au cas où la force P' et la résistance P ont des directions quelconques, et la seconde se rapporte à celui où la puissance et la résistance sont parallèles.

Équilibre de la Vis, en ayant égard au frottement.

Nous avons trouvé (pag. 171) cette relation

$$f = p \times \frac{h}{2\pi r} \ldots (1),$$

p étant le poids élémentaire qui repose sur un point d'une hélice, et f la force horisontale qui le retient en équilibre: mais, dans ce cas, nous avons obtenu précédemment pour la relation entre la puissance horisontale et la résistance verticale en équilibre sur un plan incliné, en ayant égard au frottement que nous désignerons par f', et en supposant de plus qu'il tourne au profit de la puissance,

$$f = p\,\frac{(\tang \iota + f')}{1 - f' \tang \iota},$$

où

$$\tang \iota = \frac{\text{hauteur}}{\text{base}} = \frac{h}{2\pi r};$$

donc

$$f = p \cdot \times \frac{\frac{h}{2\pi r} + f'}{1 - f' \cdot \frac{h}{2\pi r}},$$

d'où l'on conclut

$$f = p \frac{h + 2\pi r f'}{2\pi r - f' h}.$$

Il faut maintenant remplacer la force auxiliaire f par la force q agissant à l'extrémité du bras de levier R (pag. 172), et on a

$$qR = fr, \quad \text{d'où} \quad f = q \cdot \frac{R}{r};$$

portant cette valeur de f dans l'équation ci-dessus, on trouve celle-ci

$$qR = pr \times \frac{h + 2\pi r f'}{2\pi r - f' h} \ldots (2),$$

qui dans l'hypothèse $f' = 0$, redonne en effet cette relation

$$q \times 2\pi R = hp \ldots (3),$$

trouvée (pag. 172) lorsqu'on fait abstraction du frottement.

Mais l'équation (2) contient le rayon r, c'est-à-dire, la plus courte distance à l'axe, du petit poids p, retenu par la force q; tandis que la relation (3) en est indépendante, ce qui a permis de l'étendre à la totalité des forces élémentaires q', q'', etc., et des poids partiels correspondans p', p'', etc.

Si l'on considère la vis à *filet carré*, on pourra supposer, sans erreur sensible, la pression totale s'exerçant sur tous les points d'une hélice tracée sur la surface en contact du filet carré, et à distances égales des deux

hélices extrêmes, limites de cette surface. On n'aura donc plus à considérer que des poids élémentaires qui reposent sur une hélice décrite sur la surface d'un cylindre dont le rayon est r : ce qui fournit une suite d'égalités telles que (2) qu'on pourra ajouter ; en sorte qu'on aura, d'après les considérations employées (note, pag. 172), cette équation relative à l'équilibre de la vis dans le cas du frottement,

$$P'R = Pr \cdot \frac{h + 2\pi rf'}{2\pi r - f'h};$$

ou plus généralement

$$P'R = Pr \cdot \frac{h \pm 2\pi f'r}{2\pi r \mp f'r} : \ldots . (4) :$$

les signes inférieur et supérieur se rapportant aux cas où le moteur P' doit être prêt à produire le mouvement, et où il est simplement destiné à empêcher que le poids P ne descende, en mettant à profit l'obstacle que le frottement oppose à cette descente. Ceux qui voudront plus de détails sur cette matière, devront consulter les ouvrages de M. *Prony*.

Frottement d'une corde qui s'enroule autour d'un cylindre.

La solution de ce problème donne une explication de la prodigieuse résistance qu'offre une corde enroulée autour d'un cylindre, résistance due au seul frottement et qui est telle que, dans les circonstances où on l'emploie, l'effort qui ferait casser la corde, ne serait qu'une petite partie de celui qui pourrait la faire glisser.

Soient *BAN* le profil du cylindre, *AD* une des extrémités de la corde à laquelle est appliquée la résistance

P' tandis que la puissance P' qui tend à vaincre cette résistance, agit à l'autre extrémité de la corde qui est enroulée autour du cylindre d'une quantité quelconque.

Le mouvement étant prêt à se produire, la puissance doit faire équilibre à la résistance et à celle provenant du frottement qui s'exerce sur l'arc embrassé par la corde: or, en désignant cet arc par z, par p la somme des pressions normales qni s'exercent sur tous les élémens de l'arc z, par f le facteur qui, multipliant p, exprime le frottement, par r le rayon du cylindre, on a été conduit à cette relation

$$P' = Pe^{\frac{fr}{r}} = Pe^{\pm\frac{fn\pi}{r}}$$

e étant le nombre 2,7182818 etc., π la demi-circonférence dont le rayon $= 1$, et n un nombre quelconque positif. On observera que les signes supérieur et inférieur ont lieu respectivement suivant que la puissance P' est prête à produire le mouvement, ou qu'elle doit faire équilibre, en profitant du frottement.

Si dans la relation $P' = Pe^{\frac{fn\pi}{r}}$, on suppose $f = \frac{1}{3}$, ce qui s'éloigne peu de la vérité, et successivement $n = 0, = 1, = 2, = 3$, etc., on aura pour les valeurs correspondantes de P', une progression géométrique dont nous rapporterons quelques termes:

pour $\frac{1}{2}$ tour.. $P' = 2{,}8\ P$
1....... $P' = 8{,}1\ P$
2 tours.. $P' = 65{,}8\ P$
3....... $P' = 534{,}2\ P$
4....... $P' = 4334{,}6\ P$,
etc.

De la Roideur des Cordes.

La roideur des cordes, considérée relativement à leur emploi dans les machines, est la résistance qu'elles opposent aux puissances qui tendent à les plier autour d'une poulie, d'un cylindre, etc.

Soit AB le diamètre horisontal d'une poulie ayant son centre en C : soient P et Π des poids équivalens aux efforts d'un moteur et d'une résistance qui agissent dans des directions verticales aux extrémités E, D d'une corde $EBAD$ enroulée sur la poulie. Fig. 139.

Si l'on fait abstraction du frottement et de la roideur de la corde, on doit avoir $P = \Pi$. Le poids Π étant supposé s'élever, l'effet de la roideur de la corde AD, ou de la résistance qu'elle oppose à sa flexion au point A, est d'écarter le poids Π de la verticale menée par le point A, et de placer son centre de gravité dans une verticale as plus éloignée de C que ne l'est le point A. L'effet contraire a lieu du côté de B ; et le centre de gravité du poids P, se trouve dans une verticale br plus près que B du centre C.

On doit, pour plus d'exactitude, supposer les points A et B placés à la rencontre de l'axe de la corde et du diamètre horisontal de la poulie. On a donc

$$P \times Cb = \Pi \times Ca,$$

c'est-à-dire

$$P\,(CB - Bb) = \Pi\,(CA + Aa),$$

$$P - \Pi = \frac{\Pi \times Aa + P \times Bb}{BC};$$

telle est donc l'augmentation du moteur P, due à la roideur de la corde.

Si on supposait que la résistance de la corde à se dérouler au point B, pût être négligée à l'égard de sa résistance à s'enrouler au point A, ce qui a lieu à-peu-près dans la pratique, on aurait $Bb = 0$, et l'expression précédente deviendrait

$$P - \Pi = \frac{\Pi \times Aa}{BC}.$$

Il résulte de cette formule que, pour un même rouleau, ou une même poulie, la résistance due à la roideur de la corde, est proportionnelle à la tension Π de cette corde, et à une quantité inconnue Aa. Si l'on suppose la quantité Aa proportionnelle à une puissance μ du diamètre K de la corde, on aura $Aa = bK^\mu$, et nommant R le rayon de la poulie, l'expression ci-dessus deviendra

$$P - \Pi = \frac{\Pi bK^\mu}{R}.$$

Mais outre la roideur provenant de la tension Π, il en existe une autre due à l'ourdissage ou à la fabrication : cette seconde résistance constante peut être supposée, comme la première, proportionnelle à une puissance μ du diamètre de la corde, où $= aK^\mu$; observons que le diamètre du rouleau, venant à diminuer, la courbure de la corde et la résistance de la roideur due à la fabrication augmenteraient, en sorte qu'on peut poser cette résistance $= \frac{aK^\mu}{R}$. On a donc pour la résistance totale, que nous désignerons par r,

$$r = \frac{K\mu}{R}(a + b\Pi).$$

Les quantités a, b, μ doivent être déterminées par l'expérience qui vérifiera en même tems la forme des fonctions adoptées.

D'après les belles expériences faites par M. *Coulomb*, pour déterminer la roideur des cordes, et rapportées avec détail dans l'*Architecture hydraulique*, l'exposant μ est 1, 7 ou 1, 8 pour les cordes blanches ; d'où on conclut que la résistance d'une corde qu'on veut plier autour d'un rouleau, est, à peu de chose près, proportionnelle au carré de son diamètre. M. *Coulomb* observe que l'exposant μ n'est pas le même dans toutes les espèces de cordes ; sa valeur dépend, pour les cordes d'une même fabrique, de l'usé et du plus ou moins de flexibilité de la corde ; mais quoique cette valeur diminue à mesure que les cordes s'usent, il ne l'a jamais trouvée au-dessous du nombre 1, 4 qu'on peut prendre pour μ lorsque les cordes sont usées.

C'est par d'autres expériences rapportées dans l'ouvrage cité, qu'on est parvenu à évaluer a et b.

CHAPITRE X.

Conditions d'Equilibre d'un nombre quelconque de forces appliquées à un ou à plusieurs Points liés invariablement entre eux.

COMME les constructions données dans le chapitre IV, n'offrent, pour la vérification de l'équilibre, que des moyens pénibles et d'ailleurs peu exacts, nous donnerons, pour arriver au même but, des formules qui n'exigent que les valeurs des composantes d'une force, suivant deux ou trois axes rectangulaires (pag. 12, 6°. et Théor. IV).

Des Forces appliquées à un Point.

Nous supposerons d'abord que les forces soient situées dans un plan, et qu'elles agissent sur un point libre que nous pourrons prendre pour l'intersection des axes rectangulaires suivant lesquels nous décomposerons les forces.

Fig. 140. Soient P', P'', P''', etc., les forces qui agissent sur le point M libre, de M vers P', P'', P''', etc., ... α', α'', α''', etc., les angles qu'elles font avec l'axe des x, β', β'', β''', etc., les angles qu'elles font avec l'axe des y: les composantes suivant l'axe des x, seront

$$P' \cos \alpha', \; P'' \cos \alpha'', \; P''' \cos \alpha''', \text{ etc.,}$$

les composantes suivant l'axe des y, seront

$$P' \cos \beta', \; P'' \cos \beta'', \; P''' \cos \beta''', \text{ etc.}$$

ou bien

$$P' \sin \alpha', \; P'' \sin \alpha'', \; P''' \sin \alpha''', \text{ etc.}$$

Les signes des composantes seront ceux des cosinus, en sorte que, 1°. pour toutes les forces situées à droite de l'axe des y, les composantes suivant l'axe des x agiront dans un même sens, c'est-à-dire, de M vers X, tandis que, pour les forces situées à gauche de l'axe des y, les composantes solliciteront le point de M vers X' ; 2°. pour les forces au-dessus de l'axe des x, les secondes composantes agiront de M vers Y, et pour les forces au-dessous de cet axe, les composantes analogues tendront à faire mouvoir le point de M vers Y'.

Si donc $\cos \alpha'$, $\cos \alpha''$.... $\sin \alpha'$, $\sin \alpha''$.... représentent les cosinus et les sinus, y compris les signes connus d'avance, on aura

$$X = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \text{etc.}$$
$$Y = P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' + \text{etc.},$$

où X représente une force unique suivant l'axe des x, et Y une force unique suivant l'axe des y.

Or, pour comprendre les deux cas dans un seul, supposons que les forces du système ne se fassent pas équilibre : on pourra toujours les remplacer par une force unique R dont nous allons assigner la grandeur et la direction.

A cet effet, décomposons cette force R en deux autres, l'une suivant l'axe des x, l'autre suivant l'axe des y; en désignant par α l'angle de la direction de R avec l'axe

des x, et par β son angle avec l'axe des y, nous aurons pour les composantes cherchées, $R \cos \alpha$, $R \cos \beta$; or, les forces $R \cos \alpha$ et $R \cos \beta$ ou $R \sin \alpha$, sont identiquement les mêmes que X et Y, puisque, dans le fait, les deux composantes suivant les axes des x et des y, de la résultante totale, ne peuvent être que les résultantes des composantes de toutes les forces suivant les mêmes axes. On a donc

$$X = R \cos \alpha, \quad Y = R \sin \alpha.$$

Qu'on ajoute les carrés de ces équations, puis qu'on divise la seconde par la première, et on aura ces deux résultats

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \text{tang } \alpha = \frac{Y}{X},$$

dont la première fait connaître la grandeur de la résultante du système, et la seconde donne sa ligne de direction, et on sait d'ailleurs qu'elle passe par le point M.

Mais, dans le cas d'équilibre, la résultante est nulle, on a donc $R = 0$, et comme R^2 est la somme de deux carrés, il faut donc qu'on ait séparément

$$X = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.} = 0$$
$$Y = P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + \text{etc.} = 0.$$

Telles sont les conditions d'équilibre d'un système de forces qui agissent sur un point libre.

L'équation de la direction de la résultante est

$$y = ax,$$

et comme $a = \text{tang } \alpha = \frac{Y}{X}$, elle devient

$$y = \frac{Y}{X}x, \quad \text{d'où} \quad Xy - Yx = 0,$$

équation satisfaite indépendamment de x, et de y par $X = 0$, $Y = 0$, ce qui ramène aux deux conditions d'équilibre trouvées ci-dessus.

Si on a seulement $Y = 0$, c'est qu'alors l'effet des composantes suivant l'axe des y, est nul ; dans cette hypothèse, tang $\alpha = 0$; la résultante est donc dirigée suivant l'axe des x, et de plus $R = X$, ce qui a effectivement lieu.

Considérons des forces P', P'', P''', etc., situées dans l'espace, et supposons qu'elles agissent sur un point libre dont les coordonnées soient a, b, c ; désignons par α', $6'$, γ' ; α'', $6''$, γ'', etc., les angles de chacune de ces forces avec les axes des x' y' z' menés par le point de concours, parallèlement aux axes primitifs des x, y, z. On aura pour les composantes suivant l'axe des x',

$$P' \cos \alpha', \; P'' \cos \alpha'', \; P''' \cos \alpha''', \text{ etc.},$$

suivant l'axe des y',

$$P' \cos 6', \; P'' \cos 6'', \; P''' \cos 6''', \text{ etc.},$$

enfin, suivant l'axe des z',

$$P' \cos \gamma', \; P'' \cos \gamma'', \; P''' \cos \gamma''', \text{ etc.}$$

Toutes les forces du système seront donc réduites à trois groupes de forces qui agiront suivant les axes des x', y', z', et les composantes de chaque groupe, dirigées suivant un même axe, se réduiront à une seule force qui sera leur somme ou leur différence ; ou plus simplement leur somme, en ayant égard aux signes connus d'avance des composantes.

De cette manières, les forces données sont remplacées par trois forces rectangulaires, et en les désignant par X, Y, Z, on aura

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \text{etc.} = X$$
$$P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + P''' \cos \beta''' + \text{etc.} = Y$$
$$P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + \text{etc.} = Z.$$

Ces valeurs de X, Y, Z, peuvent être positives ou négatives, et leurs signes feront connaître les sens dans lesquels ces forces agissent : par exemple, si la force X est positive, c'est qu'elle agit dans le sens de celle des composantes $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$, etc. qui sont positives ; au contraire, si elle est négative, elle agit dans le sens opposé, ou dans celui des composantes négatives.

Cela posé, désignons par R la résultante définitive des forces P', P'', etc., par α, β, γ, etc. les angles qu'elle fait avec les axes des x', y', z', ou avec les trois forces X, Y, Z ; on aura, d'après la composition de trois forces rectangulaires (Théor. IV)

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R}.$$

Pour que les forces P', P'', etc., soient en équilibre, il faut et il suffit que leur résultante soit nulle, c'est-à-dire, qu'on ait $R = 0$, ou

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

condition qui emporte les suivantes

$$X = 0, \; Y = 0, \; Z = 0,$$

c'est-à-dire

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.} = 0$$
$$P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \text{etc.} = 0$$
$$P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \text{etc.} = 0.$$

Telles sont les équations d'équilibre d'un système quelconque de forces appliquées à un même point qu'on suppose entièrement libre. Dans un pareil système, l'une des forces doit être égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres. On s'assurera de l'existence de cette condition par l'analyse suivante.

Soit R' la résultante des forces P'', P''', etc., $\alpha_{\prime}$, $\beta_{\prime}$, $\gamma_{\prime}$, les angles qu'elle fait avec les axes des x', y', z', et posons, pour abréger

$$P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \text{etc.} = X'$$
$$P'' \cos \beta'' + P''' \cos \beta''' + \text{etc.} = Y'$$
$$P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + \text{etc.} = Z',$$

on aura, d'après ce qui précède

$$X' = R' \cos \alpha_{\prime}; \; Y' = R' \cos \beta_{\prime}; \; Z' = R' \cos \gamma_{\prime};$$

et par conséquent, en vertu des équations d'équilibre,

$$P' \cos \alpha' = - R' \cos \alpha_{\prime}$$
$$P' \cos \beta' = - R' \cos \beta_{\prime}$$
$$P' \cos \gamma' = - R' \cos \gamma_{\prime}.$$

En ajoutant les carrés de ces, équations il viendra

$$P'^2 = R'^2,$$

en observant que

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$
$$\cos^2\alpha_{,} + \cos^2\beta_{,} + \cos^2\gamma_{,} = 1.$$

On aura donc

$$P' = \pm R';$$

mais comme les forces P' et R' sont des quantités absolues, il faut qu'on ait $P' = R'$; les équations précédentes se réduisent alors à

$$\cos\alpha' = -\cos\alpha_{,};\ \cos\beta' = -\cos\beta_{,};\ \cos\gamma' = -\cos\gamma_{,};$$

d'où l'on conclut

$$\alpha' = 200^\circ - \alpha_{,};\ \beta' = 200^\circ - \beta_{,};\ \gamma' = 200^\circ - \gamma_{,}.$$

Ainsi, les angles α' et $\alpha_{,}$, β' et $\beta_{,}$, γ' et $\gamma_{,}$, étant supplémens l'un de l'autre, il s'ensuit que la force P' est égale et directement opposée à la résultante R'.

Les équations de la ligne de direction de la résultante R, sont

$$(x-a)\,Z = (z-c)\,X$$
$$(y-b)\,Z = (z-c)\,Y$$
$$(y-b)\,X = (x-a)\,Y\ (*),$$

(*) On sait que

$$x = mz,\ y = nz$$

sont les équations des projections d'une droite menée par l'origine, sur les plans des xz et des yz : si sur cette droite et à partir de l'origine, on prend une longueur R, si x, y, z sont les coordonnées des extrémités de R et α, β, γ, les angles de R avec les axes des x, y, z, on aura

$$x = R\cos\alpha,\quad y = R\cos\beta,\ z = R\cos\gamma,$$

a, b, c étant les coordonnées du point sollicité : l'une quelconque de ces équations est comprise dans les deux autres.

Les conditions sous lesquelles la résultante s'anéantit indépendamment des coordonnées x, y, z, sont

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0,$$

et on retrouve ainsi celles de l'équilibre. Si de ces trois équations les deux premières seules ont lieu, on a

$$R = Z,\ \cos\alpha = 0,\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = 1;$$

donc la résultante est suivant l'axe des z', c'est-à-dire,

---

d'où on déduit

$$\frac{x}{z} = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\ \frac{y}{z} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

mais on a en même tems

$$\frac{x}{z} = m,\quad \frac{y}{z} = n,$$

donc $m = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $n = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$; et conséquemment

$$\cos\gamma \cdot x = \cos\alpha \cdot z;\quad \cos\gamma \cdot y = \cos\beta \cdot z,$$

mais à cause de $\cos\gamma = \frac{Z}{R}$, $\cos\beta = \frac{Y}{R}$, $\cos\alpha = \frac{X}{R}$, (pag. 222), les deux équations précédentes deviennent

$$Zx = Xz,\quad Zy = Yz,\ \text{d'où } Xy = Yx:$$

or, la droite devant passer par le point a, b, c, ces équations se changent dans celles du texte,

qu'il y a partiellement équilibre suivant les axes des x' et y'. Dans le cas de $X=0$, on trouve

$$R=\sqrt{Y^2+Z^2},\quad \cos\alpha=0,$$

et on voit que la résultante est dans le plan des z' y'.

On peut se proposer de substituer aux puissances... P', P'', P''' etc., trois puissances F', F'', F''' qui feraient avec les axes coordonnés, des angles donnés dont les cosinus seraient respectivement d', f', g'; d'', f'', g''; d''', f''', g'''. On aurait les trois relations

$$X=d'F'+d''F''+d'''F'''$$
$$Y=f'F'+f''F''+f'''F'''$$
$$Z=g'F'+g''F''+g'''F''',$$

desquelles on déduirait, par l'élimination, les quantités inconnues des forces F', F'', F'''.

Le théorême des momens démontré (pag. 31) savoir

$$P'p'+P''p''+P'''p'''+\text{etc.}=Rr,$$

n'est qu'une conséquence de ces deux équations trouvées (pag. 219 et 220).

$$P'\cos\alpha'+P''\cos\alpha''+\text{etc.}=R\cos\alpha$$
$$P'\sin\alpha'+P''\sin\alpha''+\text{etc.}=R\sin\alpha.$$

En effet, qu'on multiplie la première par $l\sin\theta$, et la seconde par $l\cos\theta$, puis qu'on retranche le premier produit du second, et on trouvera

$$P'l\sin(\alpha'-\theta)+P''l\sin(\alpha''-\theta)+\text{etc.}=Rl\sin(\alpha-\theta).$$

Or, le point F étant le point de départ des perpen-

diculaires p' p''.... r, c'est-à-dire, *le centre des momens*, et l'angle θ celui de la ligne MF avec l'axe des x, et l la longueur MF, on voit aisément que...... $l \sin(\alpha' - \theta) = p'$, $l \sin(\alpha'' - \theta) = p''$, etc. Fig. 141.

Si l'angle $\theta = 0$, c'est-à-dire, si l'on prend la ligne MF pour l'axe des x, alors $l \sin(\alpha'-\theta)$, $l \sin(\alpha''-\theta)$, etc. deviennent $l \sin\alpha'$, $l \sin\alpha''$, de sorte que, pour avoir le théorème des momens, il suffit de multiplier la seconde équation

$$P' \sin\alpha' + P'' \sin\alpha'' + \text{etc.} = R \sin\alpha,$$

par l ou par la partie de l'axe des abscisses, comprise entre le point matériel et le centre des momens.

Ainsi les signes des momens dépendront de ceux des sinus des angles que font les forces avec la ligne qui joint le point de concours des directions de ces forces et le centre des momens.

THÉORÈME XXXVIII. *Pour estimer suivant une direction différente de la sienne, une force dont on connaît déjà les composantes suivant trois axes rectangulaires, il faut prendre la somme de ces composantes multipliées respectivement par les cosinus des angles qu'elles forment avec la direction nouvelle.*

Si l'on désigne par θ l'angle des deux droites, et par α, β, γ; α', β', γ' les angles de chacune d'elles avec trois axes rectangulaires menés par l'intersection des deux droites, on sait que

$$\cos\theta = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma'.$$

Si l'on considère une force R dirigée suivant la droite qui fait les angles α, β, γ avec les axes des x, y, z,

cette force estimée suivant la seconde droite, c'est-à-dire, projetée sur cette droite, donnera, pour sa projection, $R\cos\theta$, et par conséquent

$$R\cos\theta = R\cos\alpha\cos\alpha' + R\cos\beta\cos\beta' + R\cos\gamma\cos\gamma',$$

donc R étant la résultante des forces P', P'', P''', etc.; et R' désignant $R\cos\theta$, on aura

$$R' = X\cos\alpha' + Y\cos\beta' + Z\cos\gamma'.$$

égalité qui rend l'énoncé.

Des Forces parallèles dans l'espace.

P', P'', P''', etc., étant des forces parallèles appliquées à des points m', m'', m''', etc., liés invariablement entre eux, et donnés par x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''', etc. et R leur résultante dont le point d'application est.... X, Y, Z, nous avons trouvé (pag. 57) ces relations

$$\left.\begin{aligned}
R &= P' + P'' + P''' + \text{etc.}\\
X &= \frac{P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.}}{R}\\
Y &= \frac{P'y' + P''y'' + P'''y''' + \text{etc.}}{R}\\
Z &= \frac{P'z' + P''z'' + P'''z''' + \text{etc.}}{R}
\end{aligned}\right\}\ (1).$$

qui conviennent encore dans le cas ou parmi les forces données, les unes agissent dans un sens et les autres dans

le sens contraire ; mais alors il faut les affecter de signes différens, et avoir égard en même tems aux signes des coordonnées.

Si donc on désigne par α, β, γ les angles de cette résultante avec les axes des x, y, z, on aura pour équations de sa direction (pag. 224).

$$(z-Z)\cos\alpha=(x-X)\cos\gamma\,;\quad (z-Z)\cos\beta=(y-Y)\cos\gamma\,,$$

c'est-à-dire,

$$\left.\begin{aligned} z &= x\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}+Z-X\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}, \\ z &= y\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}+Z-Y\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}, \end{aligned}\right\}(2)$$

et après avoir remplacé X, Y, Z par leurs valeurs précédentes, on trouvera

$$\left.\begin{aligned} z &= x\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}+\frac{\Sigma Pz-\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\Sigma Px}{R} \\ z &= y\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}+\frac{\Sigma Pz-\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\Sigma Py}{R} \end{aligned}\right\}(3)$$

en désignant, pour abréger, $P'x'+P''x''+$ etc. par ΣPx ; $P'y'+P''y''$ etc. par ΣPy ; $P'z'+P''z''+$ etc. par ΣPz.

Après la multiplication par R, ces équations s'anéantissent indépendamment des coordonnées x, y, z et des angles α, β, γ, sous les trois conditions

$$\left.\begin{array}{l} R=P'+P''+P'''+\text{etc.}=0 \\ \Sigma Px=P'x'+P''x''+P'''x'''+\text{etc.}=0 \\ \Sigma Py=P'y'+P''y''+P'''y'''+\text{etc.}=0 \\ \Sigma Pz=P'z'+P''z''+P'''z'''+\text{etc.}=0 \end{array}\right\} (4),$$

qui conséquemment expriment l'équilibre du système.

On connaîtra les coordonnées x et y du point dans lequel la résultante perce le plan horisontal, en faisant $z=0$ dans les équations (3). Mais si les forces données sont telles qu'on ait $R=0$, les coordonnées de ce point d'intersection seront infinies ; il en sera de même de celles des points de rencontre de la même résultante avec les autres plans coordonnés. On conclut de là qu'il ne peut y avoir équilibre sous la seule condition $R=0$; et qu'alors les forces du système, se réduisent à deux résultantes égales, contraires et non directement opposées, c'est-à-dire, à un couple.

On appelle *moment d'une force par rapport à un plan*, le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur ce plan. Les trois dernières des équations (1) étant multipliées par R, renferment donc le théorème des momens des forces parallèles par rapport à trois plans rectangulaires. Ces momens peuvent être positifs ou négatifs ; ils sont positifs quand la force et l'ordonnée de son point d'application, sont de même signe ; négatifs dans le cas contraire.

Les expressions des coordonnées X, Y, Z, du point d'application de la résultante, données par les trois dernières des équations (1), restent les mêmes lorsque toutes les forces du système tournent en même tems et de la même manière autour de leurs points respectifs

d'application, le parallélisme, l'intensité et les points d'application des forces étant conservés ; elles ne varient pas non plus lorsque ces forces deviennent mP', mP'', etc. Ce point d'application est *le centre des forces parallèles* (pag. 58).

On peut encore parvenir très-simplement, comme nous allons le montrer, aux conditions d'équilibre d'un système de forces parallèles.

En effet, quel que soit le nombre de ces forces, on peut toujours les concevoir réduites à deux, dont l'une soit la résultante de toutes celles qui agissent dans un sens, et l'autre la résultante de toutes celles qui agissent en sens contraire. Pour que ces deux forces se fassent équilibre, il est nécessaire qu'elles soient égales et directement opposées : pour qu'elles soient égales, il faut que la somme des forces P', P'', P''', etc., soit nulle en ayant égard aux signes. Ainsi l'on a pour première condition d'équilibre

$$P' + P'' + P''' + \text{etc.} = 0 \dots . (5).$$

Il faut encore exprimer que les directions des deux résultantes coïncident, et pour cela, on cherchera séparément le centre des forces parallèles qui agissent dans un sens, et celui du groupe de ces forces qui agissent dans le sens opposé, puis on assujettira ces deux centres à se trouver sur une parallèle à la direction commune des forces données. Prenons, pour plus de commodité, le plan des xy perpendiculaire à la direction commune des forces ; alors les deux centres devront se trouver sur une même perpendiculaire à ce plan, condition qui sera remplie, si les coordonnées prises dans ce plan, sont égales pour ce point. Or, les deux résultantes appliquées

à ces centres, sont déja égales et de signes contraires; il suffira donc que leurs momens par rapport à chacun des plans xz, yz, soient aussi égaux et de signes contraires : et comme le moment de chaque résultante, est égal à la somme des momens de ses composantes, il s'ensuit qu'en ayant égard aux signes, la somme des momens de toutes les forces P', P'', etc., doit être nulle par rapport au plan des xz, et par rapport à celui des yz. Les deux équations d'équilibre qui restent à trouver, sont donc

$$\left.\begin{array}{l} P'y' + P''y'' + P'''y''' + \text{etc.} = 0 \\ P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.} = 0 \end{array}\right\} (6).$$

On les aurait déduites des équations (2) qui, dans les hypothèses précédentes sous lesquelles $\cos\alpha = 0$, $\cos\mathcal{C} = 0$, $\cos\gamma = 1$, se réduisent à

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

en observant que $R = 0$.

Ainsi, pour l'équilibre d'un systême de forces parallèles, il est nécessaire et il suffit,

1°. Que la somme des forces, soit égale à zéro;

2°. Que la somme de leurs momens, soit nulle par rapport à deux plans parallèles à ces forces.

Si la seconde condition seule était remplie, c'est-à-dire, si les équations (6) étaient vérifiées, sans que l'équation (5) le fût, la résultante des forces coïnciderait avec l'intersection des plans xz, yz; par conséquent elle serait détruite dans le cas où cette ligne contiendrait un point fixe. Il s'ensuit donc que lorsque le corps solide auquel sont appliquées des forces parallèles, renferme un point fixe, il suffit, pour l'équilibre, que la somme des momens

de ces forces soit nulle, par rapport à deux plans parallèles à leur direction commune, menés par le point fixe. Si l'une seulement des équations (6) était satisfaite, il n'y aurait équilibre que dans le cas d'un axe fixe dans le corps, et alors la pression qu'éprouverait cet axe, serait due à la résultante des forces parallèles.

Des Forces en nombre quelconque, dirigées dans un plan, et appliquées à des points matériels liés invariablement entre eux.

Soient P' P''.... R les forces données et leur résultante, α', α''.... α, β', β''....β les angles de ces forces et de leur résultante avec des parallèles aux axes des x et des y, menées par chacun des points d'application m', m''.... Les composantes de ces forces, suivant ces parallèles, seront $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$......, $P' \cos \beta'$, $P'' \cos \beta''$..... et les composantes analogues de la résultante R, seront $R \cos \alpha$, $R \cos \beta$.

Or, les forces de chacun de ces groupes, étant parallèles, on vient de démontrer, 1°. que la quantité de la résultante, est égale à la somme des quantités des composantes; 2°. que son moment est égal à la somme des momens des composantes : on aura donc ces quatre équations

$$\left.\begin{aligned} X = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + . &= R \cos \alpha \\ Y = P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + . &= R \cos \beta \\ P' \cos \alpha' . y' + P'' \cos \alpha'' . y'' &= R \cos \alpha . b \\ P' \cos \beta' . x' + P'' \cos \beta'' . x'' &= R \cos \beta . a \end{aligned}\right\} (1),$$

où y', y''...... b sont les perpendiculaires menées de

l'origine sur les forces parallèles à l'axe des x et sur leur résultante, et x', x''.... a les perpendiculaires menées de la même origine sur les composantes parallèles à l'axe des y et sur leur résultante; en sorte que a, b; x', y'; x'', y''.... sont les coordonnées des points d'application de la résultante et des composantes.

Les deux premières des équations (1) donnent ces déterminations

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \cos\alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos\beta = \sin\alpha = \frac{Y}{R}.$$

Ainsi, la valeur de la résultante et les angles qu'elle fait avec les deux axes menés dans le plan des forces, sont connus : il ne reste plus qu'à trouver un seul point de sa direction.

L'équation de la direction de la résultante, est

$$y = a'x + b' = \frac{Y}{X}\, x + b',$$

d'où

$$Xy - Yx = b'X = b' \cos\alpha \,.\, \frac{X}{\cos\alpha}.$$

Fig 142. Si l'on désigne par r la perpendiculaire menée de l'origine A sur la direction de cette résultante dont le point d'application est m, et si l'on observe que $AK = b'$, on trouvera $b' \cos\alpha = r$, et conséquemment

$$Xy - Yx = r \,.\, \frac{X}{\cos\alpha} = Rr.$$

Mais comme les coordonnées a et b satisfont aussi à cette dernière équation, on aura

$$Xb - Ya = Rr = R\cos\alpha \,.\, b - R\sin\alpha \,.\, a \ldots. (A),$$

on trouverait pareillement

$$P'p' = P' \cos \alpha' . y' - P' \sin \alpha' . x' \ldots . (B)$$

$$P''p'' = P'' \cos \alpha'' . y'' - P'' \sin \alpha'' . x'' \ldots . (C)$$

etc.,

p', p'', p''', etc., étant les perpendiculaires menées de l'origine sur les directions des composantes. Or, si l'on retranche la dernière des équations (1) de la troisième, l'équation résultante qui tiendra lieu de celles-là, sera, d'après les relations (A), (B), (C), etc.,

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = Rr \ldots . (2).$$

Le moment de la résultante, est donc encore égal à la somme des momens des composantes, lors même que les forces ne concourent pas en un point unique.

Il ne faut pas confondre les momens par rapport à un point, avec les momens par rapport à un plan, dont il a été question dans la théorie des forces parallèles : ceux-ci dépendent du point d'application de la force, et sont indépendans de sa direction ; les momens, par rapport à un point, dépendent au contraire de la direction, et sont indépendans du point d'application.

On a vu (Théor. X, pag. 28 et 29) que le moment de la résultante de deux forces qui concourent, pris par rapport à un point de leur plan, est égal à la différence ou à la somme des momens des composantes, pris par rapport au même point : savoir à la différence, quand ce point est compris dans l'angle des composantes ou dans son opposé au sommet ; à la somme quand ce point tombe hors de ces deux angles.

Ainsi P' et P'' étant deux forces non parallèles, et Q leur résultante, on a

$$Qq = P'p' \pm P''p'',$$

q, p' et p'' étant des perpendiculaires menées d'un point pris dans le plan des forces, sur les directions de Q, P' et P''. Le signe supérieur a lieu lorsque les forces et leur résultante tendent à faire tourner les points d'application dans le même sens autour du centre des momens regardé comme un point fixe, et le signe inférieur lorsque Q et P' tendent à faire tourner ces points dans le même sens, tandis que P'' tend à faire tourner le sien dans le sens contraire (pag. 28 et 29).

Actuellement considérons un nombre quelconque de forces qui ne concourent pas, et supposons que les trois premières forces P', P'' et P''' tendent à faire tourner dans un même sens, et toutes les autres dans un sens opposé. Soit Q la résultante de P' et P'', Q' celle de Q et P'' : soient encore p', p'', p''', q, q' les perpendiculaires abaissées du centre des momens sur leurs directions des forces P', P'', P''', Q, Q' : nous aurons d'après ce qui précède

$$Qq = P'p' + P''p''; \; Q'q' = Qq + P'''p''',$$

d'où l'on tire

$$Q'q' = P'p' + P''p'' + P'''p'''.$$

De même si l'on désigne par $Q_{\prime}$ la résultante de toutes les autres forces P^{IV}, P^{V}, etc., par $q_{\prime}$, p^{IV}, p^{V}, etc., les perpendiculaires abaissées du point fixe sur leurs directions, on aura

$$Q_{\prime}q_{\prime} = P^{\text{IV}}p^{\text{IV}} + P^{\text{V}}p^{\text{V}} + \text{etc.}$$

Or la résultante R de toutes les forces données, sera

telle des deux forces Q' et $Q_{,}$, si donc on représente par r la perpendiculaire menée du point fixe sur R, on aura

$$Rr = Q'q' - Q_{,}q_{,}, \text{ ou } Rr = Q_{,}q_{,} - Q'q'$$

selon que $Q'q'$ sera plus grand ou plus petit que $Q_{,}q_{,}$: dans le premier cas, la force R tendra à faire tourner le système dans le même sens que la force Q', et conséquemment dans le même sens que les forces P', P'' et P'''. Ainsi en supposant ce cas, et éliminant $Q'q'$ et $Q_{,}q_{,}$, on aura

$$Rr = P'p' + P''p'' + P'''p''' - P^{iv}p^{iv} - P^{v}p^{v}, \text{ etc.}$$

ce qui est l'équation (2) obtenue directement.

Ainsi on a ce théorème général à l'égard des forces situées dans un plan et appliquées à différens points : *le moment de la résultante est égal à la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans le même sens qu'elle, moins la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner en sens contraire.*

Les quatre équations (1) pourront donc être remplacées par les trois suivantes

$$\left.\begin{array}{l} P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{etc.} = R\cos\alpha \\ P'\cos6' + P''\cos6'' + \text{etc.} = R\cos6 \\ P'p' + P''p'' + \text{etc.} = Rr \end{array}\right\} \ldots (3),$$

dont la dernière peut l'être par celle-ci

$$P'(y'\cos\alpha' - x'\sin\alpha') + P''(y''\cos\alpha'' - x''\sin\alpha'') + \text{etc.} = R\,(b\cos\alpha - a\cos6) \ldots\ldots (4).$$

qui renferme les coordonnées des points d'application.

L'équation de la direction de la résultante, donnée (pag. 234) devient, en observant que

$$b' = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{Rr}{X},$$

$$y = \frac{Y}{X}x + \frac{P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.}}{X} \ldots\ldots(5),$$

et elle s'anéantit sans rien prononcer sur x et y, par

$$X = 0,\ Y = 0,\ P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = 0,\ (6)$$

qui expriment conséquemment les conditions d'équilibre.

Des deux premières, on conclut que l'équilibre ne peut exister s'il n'a lieu, en ramenant toutes les forces sous leurs quantités primitives et sous des directions parallèles, à agir sur un seul point.

Si toutes les forces admettent une résultante unique, on sait déja trouver sa grandeur et une parallèle à sa direction, menée par l'origine A : on aura donc l'un des points de cette résultante, en décrivant de l'origine ou du centre des momens, une circonférence du rayon r, à laquelle on mènera une tangente sous l'inclinaison α avec l'axe des x. Mais pour savoir de quel côté par rapport à la parallèle, tombe la résultante, il faudra avoir égard au sens dans lequel la résultante tend à faire tourner autour du centre des momens, et au sens de son action sur son point d'application, distinctions nécessaires.

Si l'origine est un point fixe, comme ce point est sollicité de la même manière que si toutes les forces du système lui étaient immédiatement appliquées sous leurs quantités primitives, et sous des directions parallèles, la quantité de la résultante devient alors la mesure de la pression qu'éprouve ce point.

Nous reviendrons encore sur l'interprétation des conditions d'équilibre (6). Pour que les forces P', P'', P''', etc., se fassent équilibre, il est nécessaire qu'en les composant deux à deux (pag. 52), ces forces se réduisent en définitif à deux égales et directement opposées : il faut donc, pour première condition, que leur résultante soit nulle, ce qui donne les deux premières équations

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Mais (pag 52) la valeur de R est également zéro, quand les forces données se réduisent à deux égales, parallèles, dirigées en sens contraires et non directement opposées, c'est-à-dire, quand elles donnent lieu à un couple : il faut donc encore exprimer que les directions de ces deux forces coïncident.

Soit S la valeur commune de ces deux résultantes, et représentons par s, s' les perpendiculaires abaissées du centre des momens sur leurs directions : nous aurons

$$S(s \pm s') = L,$$

L étant $P'p' + P''p'' +$ etc., ou la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner le système dans un sens, moins celle des momens qui tendent à le faire tourner en sens contraire, et des deux signes $\pm$, le supérieur ayant lieu quand les deux forces S tendent à faire tourner dans le même sens autour du centre des momens, et le signe inférieur quand elles tendent à faire tourner dans des sens contraires autour du même point : or, les deux forces S étant parallèles et dirigées en sens contraires, le premier ou le second cas aura lieu suivant que ces forces comprendront entre elles le centre des momens, ou qu'elles tomberont d'un même côté de ce

point. C'est dans cette dernière position seulement que les forces peuvent coïncider, et de plus, il faut qu'on ait $s = s'$, d'où il résulte $L = 0$. Réciproquement, si l'on a $L = 0$, il faudra que le signe inférieur ait lieu, et on aura en outre $s = s'$: donc alors, les deux forces coïncideront, elles seront équidistantes du centre, et elles tomberont d'un même côté de ce point.

Ainsi ces trois équations sont nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système de forces dirigées dans un même plan.

Lorsqu'on a seulement $Rr = 0$, d'où $r = 0$, ce centre est donc alors un des points de la résultante. Or, s'il existe dans le plan des forces un point fixe, il suffira, pour l'équilibre, que leur résultante vienne passer par ce point; si donc on en fait le centre des momens, la seule condition $L = 0$, c'est-à-dire

$$P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0,$$

sera nécessaire pour l'équilibre.

Des Forces en nombre quelconque, appliquées à un système de points, ou à un corps libre de forme invariable.

Désignons toujours par m', m'', m''', etc., les points matériels sur lesquels agissent les forces données, points liés entre eux d'une manière invariable; par.......... P', P'', P''', etc., les forces appliquées à ces points; par α', β', γ'; α'', β'', γ'', etc., les angles des directions de ces forces avec les trois axes rectangulaires.

Décomposons chacune des forces P', P'', etc., autour

de son point d'application, en trois forces parallèles aux axes des coordonnées; ces composantes seront $P' \cos \alpha'$, $P' \cos \mathcal{C}'$, $P' \cos \gamma'$, etc., et il s'agira, d'après ce qui a été dit (chap. IV), de ramener le groupe des composantes $P' \cos \alpha'$, $P' \cos \mathcal{C}'$; $P'' \cos \alpha''$, $P'' \cos \mathcal{C}''$, etc., à agir dans un même plan.

A cet effet, on pourra, sans altérer le système des forces qu'on considère, appliquer à chacun des points matériels deux forces égales, contraires et parallèles à l'axe des z, et en les désignant par g', $-g'$;......... g'', $-g''$ etc., on composera la force g' avec $P' \cos \alpha'$, puis $-g'$ avec $P' \cos \mathcal{C}'$. Les directions prolongées de ces résultantes, iront rencontrer le plan des xy en des points dont il s'agit de calculer les coordonnées.

Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées du point m'; par a', b', c' les angles de la direction de la résultante R' de g' et $P' \cos \alpha'$ avec les trois axes; par x, y, z ses coordonnées, et par M' le point où elle perce le plan horisontal, on aura pour ses équations (pag. 224),

$$x - x' = (z - z')\frac{\cos a'}{\cos c'}, \quad y - y' = (z - z')\frac{\cos b'}{\cos c'},$$

d'où l'on déduit, pour $z = 0$,

$$x = x' - z'\frac{\cos a'}{\cos c'}, \quad y = y' - z'\frac{\cos b'}{\cos c'} = y',$$

en observant que, pour cette résultante, $b' = 100^d$. Or, en décomposant au point M' la résultante R' dans les forces g' et $P' \cos \alpha'$, on trouvera

$$P' \cos \alpha' = R' \cos a', \quad g' = R' \cos c',$$

16

d'où

$$\frac{P' \cos \alpha'}{g'} = \frac{\cos \alpha'}{\cos c'},$$

et conséquemment

$$x = x' - \frac{z'P' \cos \alpha'}{g'},\ y = y'.$$

On trouverait de la même manière que les coordonnées du point dans lequel la résultante R, de........ $-g'$ et $P' \cos \beta'$, perce le même plan, sont

$$X = x',\ Y = y' + \frac{z'P' \cos \beta'}{g'}.$$

Après avoir opéré de la même manière sur toutes les autres forces, on aura, en place des forces données, un système de forces dirigées dans le plan des xy, et un système de forces perpendiculaires à ce plan.

Nous avons trouvé (pag. 237 et 238), pour les premières, cette équation de la résultante

$$y = \frac{Y}{X} x + \frac{L}{X} \ldots\ldots (1),$$

en posant

$$X = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.}$$

$$Y = P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \text{etc.}$$

$$L = P'(y' \cos \alpha' - x' \cos \beta') + P''(y'' \cos \alpha'' - x'' \cos \beta'') + \text{etc.}$$

Quant aux forces parallèles à l'axe des z, savoir.... $P' \cos \gamma'$, $P'' \cos \gamma''$, $P''' \cos \gamma'''$, etc., g', g'', g''', etc. $-g'$, $-g''$, $-g'''$, etc., on aura, pour leur somme

$$Z = P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + \text{etc.}$$

Faisons les sommes des momens de ces forces parallèles par rapport aux plans des xz et des yz (pag. 232, form. 6). Or, par rapport au premier plan, la somme des momens des composantes $P' \cos \gamma'$, $P'' \cos \gamma''$, etc., est

$$y'P' \cos \gamma' + y''P'' \cos \gamma'' + y'''P''' \cos \gamma''' + \text{etc.},$$

la somme des momens de g', g'', g''', etc., est

$$y'g' + y''g'' + y'''g''' + \text{etc.},$$

enfin la somme des momens de $-g'$, $-g''$, $-g'''$, etc., est

$$-g'\left(y' + \frac{z'P' \cos \mathcal{C}'}{g'}\right) - g''\left(y'' + \frac{z''P''\cos \mathcal{C}''}{g''}\right) - \text{etc.}$$

On a donc en ajoutant ces trois sommes et en réduisant

$$N = P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\mathcal{C}') + P''(y''\cos\gamma'' - z''\cos\mathcal{C}'') + \text{etc.}$$

On trouvera de même, pour la somme des momens des composantes par rapport au plan des yz,

$$M = P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + P''(x''\cos\gamma'' - z''\cos\alpha'') + \text{etc.}$$

Pour trouver l'équation de la direction de la résultante r du groupe des forces parallèles, on multipliera la première des équations (3) (pag. 229) par $\cos \alpha$, et la seconde par $\cos \mathcal{C}$, et en observant que, dans le cas dont il s'agit ici, $\cos \gamma = 1$, $\cos \mathcal{C} = 0$, $\cos \alpha = 0$, on aura

$$x = \frac{P'x' + P''x''}{r} + \text{etc.}$$

$$y = \frac{P'y' + P''y''}{r} + \text{etc.}$$

Or, $P'x'$, $P''x''$, etc., $P'y'$, $P''y''$, etc., sont les momens des composantes par rapport aux plans yz, xz que nous avons désignés précédemment par M et N, et r est la somme des composantes verticales, que nous avons notée par Z : on a donc

$$(2)\dots\; x=\frac{M}{Z},\quad y=\frac{N}{Z}\dots(3).$$

Pour l'équilibre du système, les équations (1), (2) et (3) doivent s'anéantir d'elles-mêmes; conséquemment ces six conditions

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0,\ L=0,\ M=0,\ N=0,(4)$$

seront nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système de forces quelconques appliquées à différens points d'un corps libre.

Les valeurs (2) et (3) de x et y portées dans (1) y introduiront la condition du concours des deux résultantes, et conséquemment le résultat exprimera qu'il y a lieu à une résultante unique. Cette équation de condition est la suivante

$$\frac{N}{Z}=\frac{Y}{X}\cdot\frac{M}{Z}+\frac{L}{X},$$

c'est-à-dire,

$$NX-MY-LZ=0$$

ou bien,

$$LZ+MY-NX=0\dots(5),$$

Quand l'équation (5) sera satisfaite, les forces...... P', P'', P''', etc., auront une résultante unique, excepté dans le cas où l'on aura seulement

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0,$$

parce qu'alors chacun des groupes de forces dirigées dans le plan des xy, et perpendiculaires à ce plan, se réduisant à deux forces, égales, opposées et non directement contraires, les forces du système ne pourront pas se composer en une force unique (pag. 63 et 64). En effet, sous ces trois conditions seules, les équations (1), (2), (3) annoncent l'impossibilité d'une résultante unique dans chacun des deux groupes de forces.

Dans le cas d'une résultante unique que nous désignerons par R, on aura

$$X = R\cos a,\ Y = R\cos b,\ Z = R\cos c,$$

a, b et c étant les angles que fait sa direction avec les trois axes; donc

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos a = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ \cos b = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos c = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

d'ailleurs

$$L = R\,(y\cos a - x\cos b)$$
$$M = R\,(x\cos c - z\cos a)$$
$$N = R\,(y\cos c - z\cos b),$$

d'où l'on tire ces trois équations

$$\left.\begin{array}{l} L - Xy + Yx = 0 \\ M - Zx + Xz = 0 \\ N - Zy + Yz = 0 \end{array}\right\}\ (6),$$

qui sont celles des trois projections de la résultante sur les plans coordonnés. Si on élimine deux des trois inconnues, on retombe sur la condition (5).

Si dans les équations (6), on suppose successivement $x=0$, $y=0$, $z=0$, on trouve

$$y=\frac{L}{X},\ z=-\frac{M}{X},$$

$$x=-\frac{L}{Y},\ z=-\frac{N}{Y},$$

$$x=\frac{M}{Z},\ y=\frac{N}{Z}.$$

On a donc tout ce qu'il faut pour déterminer la quantité de la résultante et sa position, lorsque toutes les forces sont réductibles à une seule.

On peut encore, dans L, M et N, en place des coordonnées des points d'application, introduire les plus courtes distances des directions des forces aux trois axes rectangulaires.

Prenons dans N le terme $P'(y'\cos\gamma'-z'\cos\mathcal{C}')$: or $P'\cos\gamma'$ et $P'\cos\mathcal{C}'$ étant les composantes de P' parallèles aux z et y, les produits $P'\cos\gamma'.y'$,...... $P'\cos\mathcal{C}'.z'$ sont les momens de ces composantes par rapport au point où leur plan couperait l'axe des x, et on observera que comme ces forces tendent à faire tourner cet axe dans deux sens contraires, la somme des momens devient la différence $P'\cos\gamma'.y'-P'\cos\mathcal{C}'.z'$ qu'on peut remplacer par le moment de la résultante.

Ces deux composantes $P'\cos\gamma'$, $P'\cos\mathcal{C}'$ étant rectangulaires, le carré de leur résultante, est......... $P'^2\cos^2\gamma'+P'^2\cos^2\mathcal{C}'=P'^2(\cos^2\gamma'+\cos^2\mathcal{C}')=P'^2\sin^2\alpha'$,

à cause de $\cos^2 \alpha' + \cos^2 \mathcal{C}' + \cos^2 \gamma' = 1$: cette résultante est donc $P' \sin \alpha'$; sa plus courte distance à l'axe des x, étant nommée π', on a

$$P' \sin \alpha' \cdot \pi' = P' (y' \cos \gamma' - z' \cos \mathcal{C}'),$$

de même

$$P'' \sin \alpha'' \cdot \pi'' = P'' (y'' \cos \gamma'' - z'' \cos \mathcal{C}''),$$

etc.

Ainsi, la condition $N = 0$ deviendra

$$P' \sin \alpha' \cdot \pi' + P'' \sin \alpha'' \cdot \pi'' + P''' \sin \alpha''' \cdot \pi''' + \text{etc.} = 0$$

on aurait en même tems

$$\left.\begin{array}{l} P' \sin \alpha' \cdot \pi' + P'' \sin \alpha'' \cdot \pi'' + P''' \sin \alpha''' \cdot \pi''' + \text{etc.} = 0 \\ P' \sin \mathcal{C}' \cdot \rho' + P'' \sin \mathcal{C}'' \cdot \rho'' + P''' \sin \mathcal{C}''' \cdot \rho''' + \text{etc.} = 0 \\ P' \sin \gamma' \cdot \sigma' + P'' \sin \gamma'' \cdot \sigma'' + P''' \sin \gamma''' \cdot \sigma''' + \text{etc.} = 0 \end{array}\right\} (7).$$

Il est facile de voir que π', π'', etc., ρ', ρ'', etc., σ', σ', etc., sont les plus courtes distances entre les directions des forces P', P'', P''', etc., et les axes des x, y et z ; car la force P' sin α' qui est déja la résultante des forces P' cos γ' et P' cos $\mathcal{C}'$, étant composée avec la composante P' cos α' perpendiculaire au plan des précédentes, doit donner pour résultante la force P' de l'espace; donc P' sin α' n'est que la projection de P' sur un plan perpendiculaire à l'axe des x, et conséquemment la plus courte distance π' de P' sin α' à l'axe des x, est la même que celle entre la direction de P' et le même axe, ce qui deviendra plus sensible encore en observant que P' sin α' et P' sont dans un plan parallèle à l'axe des x. Mêmes conclusions à l'égard des autres plus courtes distances ρ', ρ'', etc., σ', σ'', etc.

$$\frac{\cos \alpha'}{\sin \gamma'} = \cos a', \quad \frac{\cos \beta'}{\sin \gamma'} = \sin a',$$

$$\frac{\cos \alpha''}{\sin \gamma''} = \cos a'', \quad \frac{\cos \beta''}{\sin \gamma''} = \sin a'',$$

etc.

Les forces du premier groupe, toutes parallèles à l'axe des z, donneront ces conditions d'équilibre,

$$\left.\begin{array}{l} Q' + Q'' + Q''' + \text{etc.} = 0 \\ Q'X' + Q''X'' + Q'''X''' + \text{etc.} = 0 \\ Q'Y' + Q''Y'' + Q'''Y''' + \text{etc.} = 0 \end{array}\right\} (8),$$

celles du second qui agissent dans le plan xy, donneront celles-ci :

$$\left.\begin{array}{r} R' \cos a' + R'' \cos a'' + R''' \cos a''' + \text{etc.} = 0 \\ R' \sin a' + R'' \sin a'' + R''' \sin a''' + \text{etc.} = 0 \\ R'(y' \cos a' - x' \sin a') + R''(y'' \cos a'' - x'' \sin a'') + \text{etc.} = 0 \end{array}\right\} (9)$$

---

sur le plan des xy, $\frac{\cos \beta'}{\cos \alpha'} = \frac{n}{m}$ représente la tangente du même angle, et on sait que

$$\cos a' = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 \beta'}{\cos^2 \alpha'}}} = \frac{\cos \alpha'}{\sqrt{\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta'}} = \frac{\cos \alpha'}{\sin \gamma'},$$

$$\sin a' = \frac{\frac{\cos \beta'}{\cos \alpha'}}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 \beta'}{\cos^2 \alpha'}}} = \frac{\cos \beta'}{\sqrt{\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta'}} = \frac{\cos \beta'}{\sin \gamma'},$$

en observant que $\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1$.

les forces R', R''.... quoique n'étant pas en équilibre, seront cependant telles que la troisième des équations (9) soit nulle, la résultante de toutes les puissances qui agissent dans le plan xy, et qui représentent toutes les composantes parallèles à ce plan, passera par l'origine, c'est-à-dire, par un point de l'axe des z; donc, si l'axe des z qui traverse le système ou le corps, était fixe, la seule équation

$$R'(y'\cos a'-x'\sin a)+R''(y''\cos a''-x''\sin a'')+\text{etc.}=0,$$

dont le premier membre représente le moment de la résultante R par rapport à cet axe, renfermerait toutes les conditions d'équilibre; car, d'une part, le système ne pourrait prendre aucun mouvement par l'action des forces Q' Q'', etc., parallèles à l'axe des z; et de l'autre l'équation dont il s'agit, indiquant que la résultante R passe par l'axe fixe, énonce rigoureusement que le système doit rester en repos. Mais comme lorsqu'un axe est fixe, le seul mouvement qui puisse avoir lieu autour de cet axe, est un mouvement de rotation, on conclut que l'équation

$$R'(y'\cos a'-x'\sin a')+R''(y''\cos'' a''-x''\sin a'')+\text{etc.}=0,$$

ou que celle-ci

$$P'(y'\cos\alpha'-x'\cos\beta')+P''(y''\cos\alpha''-x''\cos\beta'')+\text{etc.}=0,$$

qui est la quatrième du système (4), exprime l'équilibre de rotation autour de l'axe des z supposé fixe.

On prouverait, de la même manière, que ces deux équations

$$P'(x'\cos\gamma'-z'\cos\alpha')+P''(x''\cos\gamma''-z''\cos\alpha'')+\text{etc.}=0$$
$$P'(y'\cos\gamma'-z'\cos\beta')+P''(y''\cos\gamma''-z''\cos\beta'')+\text{etc.}=0,$$

expriment les équilibres de rotation autour de chacun des deux autres axes, devenu fixe à son tour.

Enfin, ces trois équations ayant lieu ensemble, le corps est en repos autour de l'origine qui est un de ses points, cette origine étant supposée fixe.

C'est d'après ces propriétés qu'on a désigné ces trois équations par le nom d'*équations d'équilibre de rotation* : les trois autres ont été appelées *équations d'équilibre de translation*.

Ceux qui voudront étudier cette matière à fond, n'auront qu'à consulter les recueils des leçons de MM. *Prony* et *Poisson*, dans lesquels on la trouvera traitée avec toute l'étendue qu'exige son importance.

NOTE Ire.

Sur le Parallélogramme des Forces (*).

Nous rappellerons, 1°. que la résultante de deux forces, est dans le plan de ces forces; 2°. que deux forces qui agissent sur un point, étant égales, la résultante doit diviser leur angle en deux parties égales. Fig. 143.

Il s'agit d'abord de déterminer la grandeur de la résultante R de deux forces égales P et Q. Pour cela, nous remarquerons qu'entre une force P et une force R résultante de la combinaison de deux forces égales P, faisant un certain angle, on doit avoir $R = AP$, A étant indépendant de P. Car R devant dépendre de P d'une certaine manière, si l'équation qui donne R au moyen de P, contenait des puissances supérieures de P, alors le rapport des forces P et R changerait, si l'on changeait leur unité de mesure; par exemple, si entre R et P on avait l'équation $R = AP^2$, d'où $\frac{R}{P} = AP$, en prenant une unité sous-double, R et P deviendraient doubles ainsi que la valeur du rapport $\frac{R}{P}$, ce qui est absurde, puisque les forces P et R n'ont pas changé. Il faut donc que la relation qui existe entre R et P, ne contienne P qu'au premier degré; reste maintenant à déterminer la forme de A. Cette quantité ne dépendant pas de P, doit être une fonction de l'angle des forces P et R. Représentant cet angle par x, on aura $R = Pfx$; et cette équation aura toujours lieu entre une résultante et sa composante, pourvu que la seconde composante soit égale à la première. Maintenant pour déterminer la forme de la fonction (f),

(*) Cette démonstration de M. POISSON a été rédigée par M. PETIT, répétiteur à l'École Polytechnique. Voyez le N°. IX de la Correspondance, janvier 1803.

nous décomposerons la force P en deux forces p et p', faisant avec la force P des angles égaux que nous représenterons par z ; ce que nous sommes en droit de faire, puisque deux forces égales ont une résultante qui partage en deux parties égales l'angle qu'elles forment entre elles. Nous décomposerons de même la force R égale à la force P, en deux autres forces q et q' égales entre elles et aux forces p et p', de manière que l'angle qAR se trouvera égal à z. On aura donc $P = pfz$ et $Q = qfz$. Mais au lieu des forces P et Q, on peut substituer les quatre forces p, p', q, q', dont la résultante sera par conséquent R. Or, si au lieu de combiner les forces p et p' et les forces q et q' ensemble, ce qui donnerait les forces P et Q, on combinait les forces p et q, p' et q', on aurait deux nouvelles résultantes qui, combinées entre elles, devraient produire le même effet que les forces P et Q. Or, ces deux résultantes seront l'une et l'autre dirigées suivant AR, puisque cette ligne partage en deux parties égales les angles pAq et $p'Aq'$. Nommant R' la première résultante, et R'' la seconde, on devra avoir $R' + R'' = R$: or $R = Pfx$; mais $P = qfz$: donc..... $R = qfxfz$; de même $R' = qf(x - z)$ et.................. $R'' = q'f(x + z) = qf(x + z)$, donc on aura

$$fxfz = f(x + z) + f(x - z),$$

équation qui va servir à déterminer la forme de la fonction (f). Pour cela, nous développerons $f(x + z)$ et $f(x - z)$ suivant les puissances de z, ce qui donnera (*)

$$f(x+z) = fx + z\frac{dfx}{dx} + \frac{z^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{z^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3} + \frac{z^4}{2.3.4}\frac{d^4fx}{dx^4} + \text{etc.}$$

$$f(x-z) = fx - z\frac{dfx}{dx} + \frac{z^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} - \frac{z^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3} + \frac{z^4}{2.3.4}\frac{d^4fx}{dx^4} - \text{etc.};$$

donc

$$f(x+z) + (fx-z) = fxfz = 2\left(fx + \frac{z^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{z^4}{2.3.4}\frac{d^4fx}{dx^4} + \text{etc.}\right);$$

(*) Voyez mon Traité de Calcul différentiel, qui se trouve chez M. Béchet, libraire, quai des Augustins, n°. 63, à Paris.

d'où

$$fz = 2\left(1+\frac{z^2}{2}\,\frac{d^2fx}{dx^2.fx}+\frac{z^4}{2.3.4}\,\frac{d^4fx}{dx^4.fx}+\frac{z^6}{2.3.4.5.6}\,\frac{d^6fx}{dx^6.fx}\right).$$

Or, z étant indépendant de x, le développement de fz doit l'être aussi de fx : on est donc en droit d'égaler les coefficiens des différentes puissances de z à des quantités constantes : ainsi nous poserons

$$\frac{d^2fx}{dx^2fx} = -a^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2fx}{dx^2} = -a^2fx,$$

et après deux différentiations successives

$$\frac{d^4fx}{dx^4} = -a^2\,\frac{d^2fx}{dx^2} = +a^4fx.$$

$$\frac{d^6fx}{dx^6} = -a^2\,\frac{d^4fx}{dx^4} = -a^6fx.$$

etc.

En sorte que les coefficiens des puissances successives de z, seront

$$-a^2,\ +a^4,\ -a^6,\ +a^8,\ -a^{10},\ \text{etc.};$$

on aura donc

$$fz = 2\left(1-\frac{a^2z^2}{2}+\frac{a^4z^4}{2.3.4}-\frac{a^6z^6}{2.3.4.5.6}+\text{etc.}\right) = 2\cos az;$$

donc

$$fx = 2\cos ax.$$

Cherchons maintenant la valeur de a. Pour cela, nous observerons que la résultante R doit devenir nulle sans que P le devienne, lorsque les forces P et R forment un angle droit, c'est-à-dire, lorsque x vaut 100°. Or il n'y a que les nombres impairs de quadrans, qui aient des cosinus nuls ; donc a sera un des nombres 1, 3, 5, 7, etc. : je dis de plus que a doit être égal à 1 ; car la résultante R ne doit devenir nulle qu'autant que $x = 100°$: mais si l'on avait, par exemple, $a = 5$, faisant $x = \left(\frac{100°}{5}\right)$, on aurait $\cos ax = 0$, et conséquemment $R = 0$,

ce qui est absurde. Donc $a = 1$; et $R = 2P \cos x$. Maintenant si l'on prend sur les directions des forces P et Q, les grandeurs AB et AC égales entre elles et égales aux forces P et Q, et qu'on achève le losange $ABDC$, on aura

$$AO = AB \times \cos BAD = P \cos x;$$

donc $AD = 2P \cos x$, et par conséquent $R = AD$. *La résultante de deux forces égales, est donc représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les intensités des deux forces.*

Nous étendrons la proposition à deux forces inégales, mais dont les directions sont perpendiculaires.

Soient P et Q les deux composantes, l'angle PAQ étant supposé
Fig. 144. droit, et soient $AB = AC$ les grandeurs des forces P et Q : si on achève le parallélogramme et qu'on mène les diagonales AD et BC, on aura $AO = BO = CO = DO$, parce que le parallélogramme est rectangulaire. Maintenant, menons FE parallèlement à BC par le point A, et BF et CE parallèles à AD par les points B et C. On aura de cette manière $AO = AE = AF$, et par conséquent l'angle $OAC = CAE$ et $OAB = BAF$. Ces angles étant égaux, on pourra décomposer la force P en deux forces qui agissent l'une suivant AF et égale à AF, et l'autre suivant AD et égale à AO. De même, on décomposera la force Q en deux forces qui agissent l'une suivant AE et égale à AE, et l'autre suivant AD et égale à AO. En sorte qu'au lieu des deux forces P et Q, nous aurons les quatre forces AF, AO, AE et AO. Les deux forces AE et AF se détruisent comme égales et dirigées en sens contraires; il ne reste donc plus que les deux forces AO dirigées suivant AD, ou, ce qui revient au même, une simple force AD dirigée suivant AD. La proposition a donc encore lieu dans ce cas.

Passons maintenant au cas où les forces forment un angle quelconque. Pour cela, supposons deux forces P et Q inégales, faisant
Fig. 145. une angle quelconque PAQ, et dont les grandeurs soient représentées par AB et AC. Achevons le parallélogramme $ABDC$, et menons les lignes DE, CG et AF perpendiculaires à AP; prolongeons DC jusques en F; alors nous pourrons décomposer la force Q en deux forces qui agiront l'une de A vers F, l'autre de A vers P, la

première égale à AF et l'autre égale à AG ; alors, au lieu des forces P et Q, nous aurons les trois forces AF, AG et AB ; or les forces AB et AG étant dirigées dans le même sens, pourront être remplacées par la force AE égale à leur somme ; en sorte qu'aux forces P et Q, on a substitué les forces AE et AF dont les directions sont perpendiculaires, et dont la résultante sera conséquemment représentée en grandeur et en direction par AD qui est aussi la diagonale du parallélogramme $ABDC$. Donc, etc.

NOTE II.

Sur le Théorême XVI, page 75.

Les forces parallèles appliquées en k, k', k'', représentatives des poids des trois pyramides dont les centres de gravité sont k, k', k'', Fig. 40.
sont proportionnelles aux forces parallèles appliquées en g, g', g'', aussi représentatives des poids des aires des trois triangles dont g, g', g'', sont les centres de gravité. Ainsi le point d'application n de la résultante r des poids p et p' en k et k', divisera la droite kk' de la même manière que le point d'application m, de la résultante R des poids P et P' en g et g', divisera la droite gg' ; car on aura

$$kn : k'n :: p' : p$$

$$gm : g'm :: P' : P,$$

or en désignant par A et A' les aires des triangles dont les centres de gravité sont en g et g', on sait que

$$P : P' :: A : A',$$

et qu'aussi

$$p : p' :: A : A',$$

parce que les pyramides dont les poids sont p et p', ont même hauteur, et pour bases A et A' : donc

$$p : p' :: P : P',$$

et conséquemment

$$kn : k'n :: gm : g'm.$$

Ainsi la droite qui joint les points S et m, passe par n. Si l'on joint k'' et n; g'' et m, et qu'on cherche le point d'application de la résultante de r et du poids p'' en k'', lequel sera le centre de gravité G de la pyramide, puis celui de la résultante R' et du poids P en g'', lequel sera le centre de gravité G' de la base, on prouvera, de la même manière, que la droite SG' passe par G. Donc le centre de gravité de la pyramide, est dans le plan $kk''k''$, et dans la droite SG' : donc il est aux trois quarts de cette droite, à partir du sommet de la pyramide polygonale.

FIN.



FAUTES A CORRIGER.

Page 77, ligne 2, la figure $XNOPQV$, *lisez :* la figure $XNQV$.

95, 6, *en remontant*, sur l'axe les perpendiculaires YY, is, *lisez :* sur l'axe YY les perpendiculaires $i\,s$.

97, 6, $= AOBD \times arCG$, *lisez :* $AOBD \times cirCG$.

123, 5, *en remont.*, la direction de P', *lisez :* la direction de P.

127, 3, enfin $- P \cos \alpha$, *lisez :* enfin $+ P \cos \alpha$.

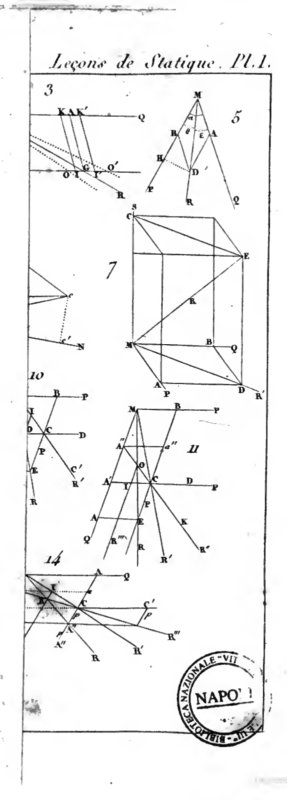
134, 11, *en remont.*, du cordon mM', *lisez :* du cordon mM.

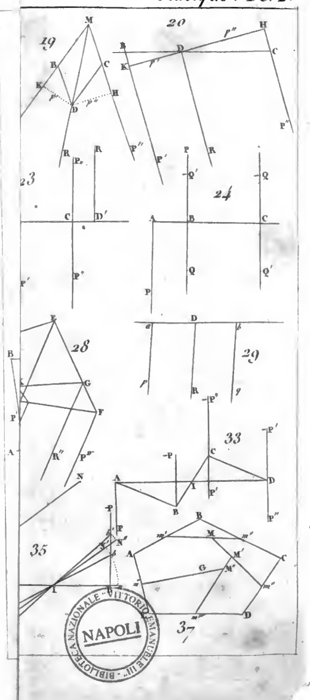
137, 14, l'angle FFM', *lisez :* l'angle FMF'.

147, 16, De deux composantes, *lisez :* Des deux composantes.

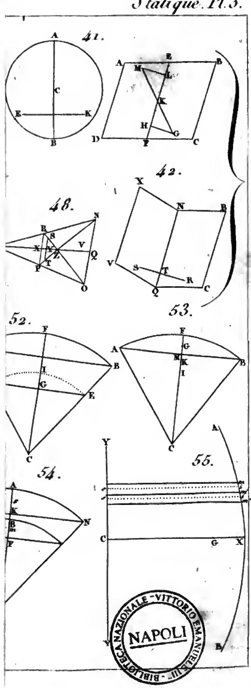
164, 11, *en remont.*, $r = \frac{525949}{720}$, *lisez :* $k = \frac{525949}{720}$.

192, Fig. 138, *lisez :* Fig. 134.


Leçons de Statique. Pl. 1.
3
K A K′
Q
G
O′
O I I′
R
5
M
B
A
H
D
P
R
Q
7
S
C
E
R
M
B
Q
A
P
D
R′
c
c′
N
10
B
P
I
O
C
D
P
E
C′
R′
R
M
B
P
A″
a″
11
O
A′
I
C
D
P
P
A
E
K
Q
R‴
R
R′
R″
14
A
Q
I′
C
C′
p
p
A″
R‴
R
R′

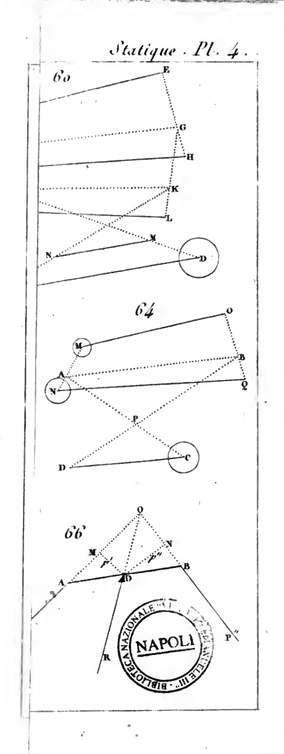


19
M
B
C
K
H
D
R
P''
P'
20
D
H
K
C
R
P''
23
C
D'
P'
24
A
B
C
Q'
Q
P
28
B
G
F
A
R''
29
D
a
b
R
33
C
D
I
A
B
35
I
N
37
B
M
A
C
G
D
NAPOLI


41.
A
C
E
K
B
A
M
E
L
B
K
H
G
D
F
C
42.
X
N
B
V
S
T
R
Q
C
48.
N
R
S
X
Y
V
Z
Q
T
P
O
52.
F
B
I
G
E
C
53.
F
A
G
N
K
B
I
C
54.
A
K
B
P
N
55.
Y
A
C
G
X
Y
B



Statique . Pl. 4.



71

72

76

77



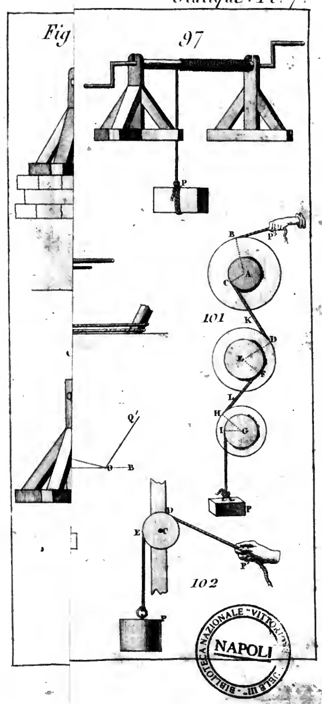
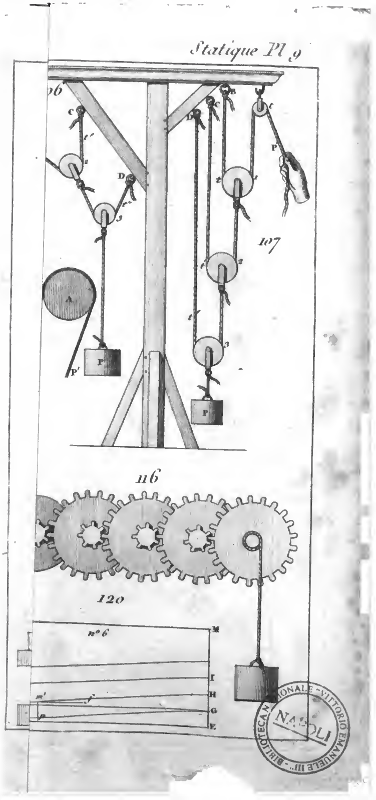
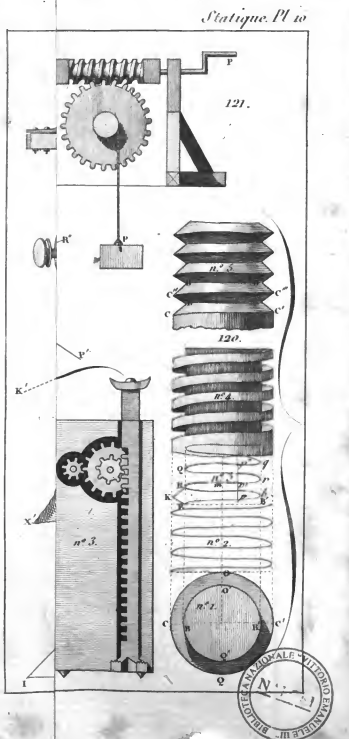


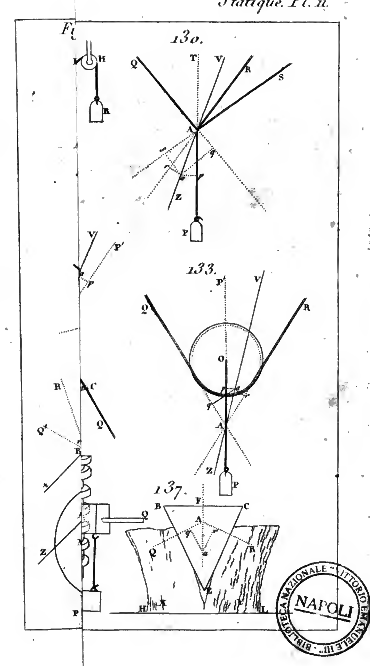
Fig
97
P
B
P'
A
C
101
K
D
E
F
L
H
I
G
P
Q'
O
B
D
E
C
P'
102
P

111

109


106
C
t'
1
D
t''
2
A
P
P'
D
C
B
t
P
t
1
107
t
2
t'
3
P
116
120
n° 6
M
I
H
m'
f
G
n
E


P
121.
P
R'
n.° 5.
C
C''
C'''
C'
120.
P'
K'
n.° 4.
n.° 3.
Q
q
R
r
K
n.° 2.
n.° 1.
C
C'
Q
X'
I
n.° 3.


130.
133.
137.

139.

a A C b B

D H E P

s r

X′ P′ P‴ X′ P

143.

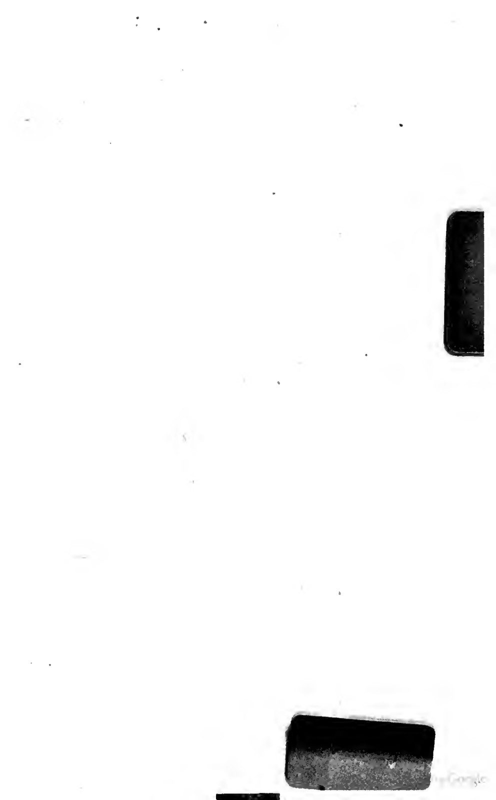
A C O B D p′ p Q R P

145.

R Q C D F P E G B A








BIBLIOTECA